THESE

DE

DOCTORAT D'ETAT ES-SCIENCES MATHEMATIQUES

présentée

A L'UNIVERSITÉ PARIS VI

par

Pierre FAURRE

pour obtenir

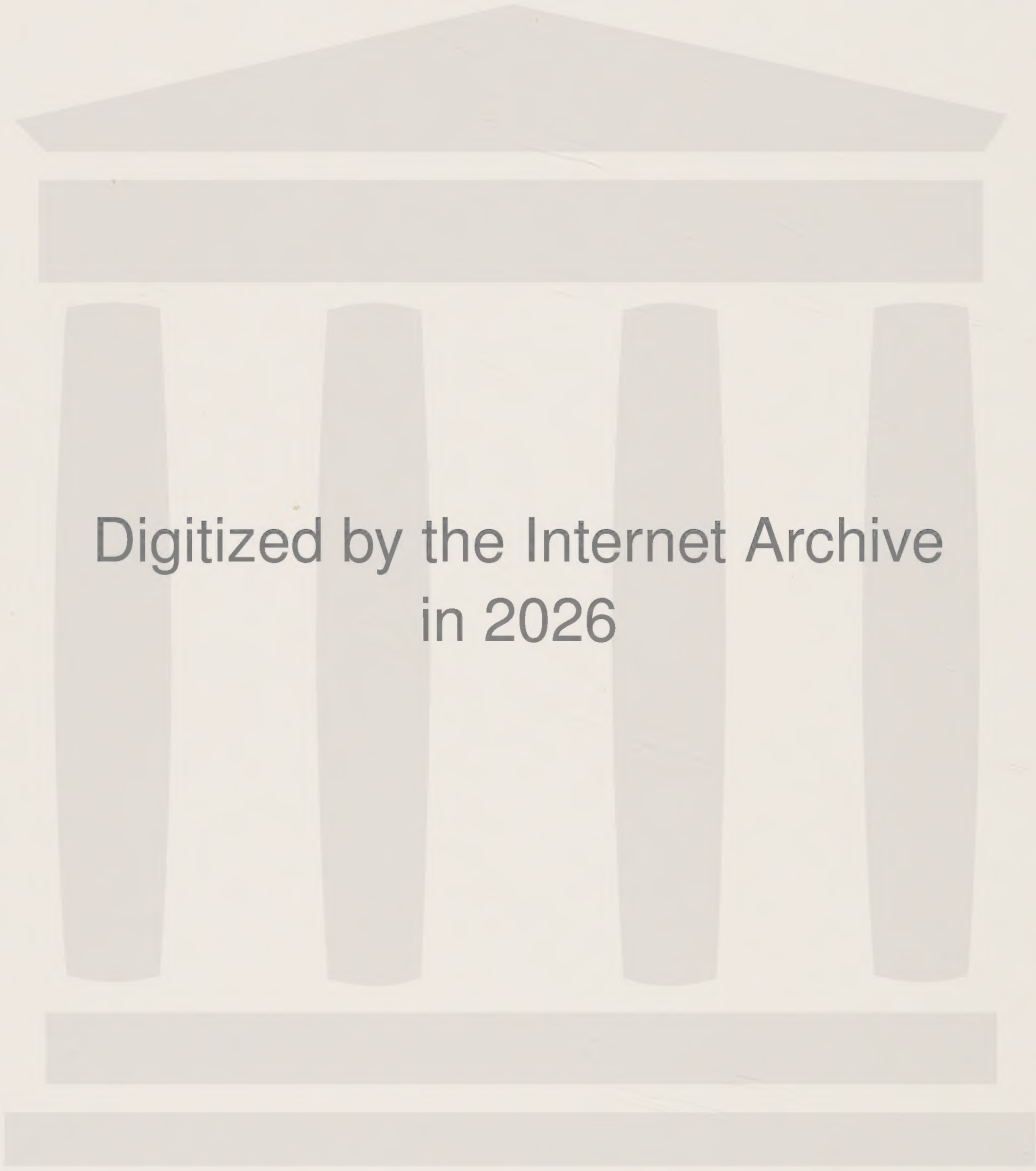
le grade de Docteur Es-Sciences

Sujet de la Thèse :

RÉALISATIONS MARKOVIENNES DE PROCESSUS STATIONNAIRES

Soutenue le 12 Décembre 1972 devant la Commission d'Examen

MM.	P.	LELONG	*Président*
	J.L.	LIONS	} *Examinateurs*
	J.	NEVEU	} *Examinateurs*
	A.	BLANC-LAPIERRE	*Membre invité*


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543517_0041

THESE

DE

DOCTORAT D'ETAT ES-SCIENCES MATHEMATIQUES

présentée

A L'UNIVERSITÉ PARIS VI

par

Pierre FAURRE

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences

Sujet de la Thèse :

RÉALISATIONS MARKOVIENNES DE PROCESSUS STATIONNAIRES

Soutenue le 12 Décembre 1972 devant la Commission d'Examen

MM.	P.	LELONG	*Président*
	J.L.	LIONS	*Examinateurs*
	J.	NEVEU	*Examinateurs*
	A.	BLANC-LAPIERRE	*Membre invité*

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

AVANT PROPOS

Ce travail qui prolonge et généralise {FAURRE 1,2,3}* n'aurait jamais été réalisé sans l'aide, le soutien et les encouragements constants du professeur J.L.Lions. Qu'il nous soit permis de lui exprimer notre profonde reconnaissance.

De plus l'environnement scientifique de son équipe à l'IRIA et celui du Centre d'Automatique de l'Ecole des Mines ont facilité sans aucun doute la progression de ce travail. Que tous en soient remerciés et particulièrement MM. A.Bensoussan, Germain, R. Glowinski, J.P. Marmorat .

Les professeurs A.Blanc-Lapierre, P.Lelong et J.Neveu nous ont fait l'honneur de constituer, avec le professeur J.L.Lions, la commission d'examen de cette thèse. Nous tenons à leur en exprimer toute notre gratitude.

---

* Les références sont désignées par le nom de l'auteur écrit en majuscules avec éventuellement un indice en cas de références multiples. Exemples : {KALMAN 1}, DAVIS ...

SOMMAIRE

	page
Chapitre 1 - Introduction	3
Chapitre 2 - Structure des processus gaussiens-markoviens	5
Chapitre 3 - Processus à représentation markovienne	20
Chapitre 4 - Lemme positif réel et dualité	32
Chapitre 5 - Structure de l'ensemble des réalisations	49
Chapitre 6 - Algorithmes de calcul des réalisations extrémales	54
Chapitre 7 - Factorisation forte, réalisation extrémale et filtre	62
Chapitre 8 - Implications pratiques et questions ouvertes	70
Références	74

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 Au cours des trente dernières années, la nécessité de réaliser des systèmes de plus en plus performants a conduit à considérer et à modéliser les signaux aléatoires ou les perturbations aléatoires qui excitent ces systèmes. De nouvelles disciplines comme le filtrage statistique, la théorie de la prédiction, la commande stochastique se sont développées, et l'on peut considérer que parmi les contributions initiales, celle de Wiener fut considérable, ainsi que celle de Kolmogorov (voir {WIENER 1} , KOLMOGOROV).

Dans l'approche de Wiener, les fonctions aléatoires sont décrites par leurs spectres que l'on suppose être des fonctions rationnelles ou que l'on approxime par de telles fonctions. La résolution des problèmes de filtrage, de prédiction ou de commande optimale stochastique consiste alors essentiellement en une factorisation spectrale, relativement simple dans le cas scalaire, mais assez complexe dans le cas vectoriel ({WIENER 2,3}, MASANI, DAVIS, TUEL, YOULA).

Une approche différente fut développée vers les années 60 par Kalman et Bucy {KALMAN 1,2,4}, fondée essentiellement sur une représentation par équations différentielles ou récurrentes, linéaires et stochastiques, ou encore par processus gaussiens-markoviens. La résolution des problèmes précédents revient alors essentiellement à l'intégration d'une équation de Riccati.

1.2 Le travail ici présenté qui prolonge et généralise les travaux {FAURRE 1,2,3} fait le lien entre ces deux approches au niveau des représentations. Plus précisement comment obtenir à partir de la covariance d'un processus gaussien vectoriel, une représentation markovienne?

Le lemme positif-réel caractérise l'ensemble des réalisations markoviennes d'un processus gaussien décrit par sa covariance. Nous avons généralisé la notion de réalisation markovienne (en incluant des bruits blancs sur l'entrée et la

sortie pouvant être correlés entre eux) de façon que le filtre optimal apparaisse comme une réalisation markovienne particulière.

Une démonstration originale du lemme est donnée au chapitre 4, qui conduit d'une part à l'étude de la structure de l'ensemble $\mathcal{S}$ des réalisations (chapitre 5) et d'autre part à des algorithmes du type Riccati permettant de calculer les deux points P^* et P_*, max et min de $\mathcal{S}$ (chapitre 6), et qui semblent nouveaux.

Un autre résultat apparemment nouveau qui est établi au chapitre 7 est que la réalisation P_* équivaut à la factorisation forte du spectre du processus et donne directement le filtre.

Une implication pratique de ce résultat est la suivante: contrairement à ce qui ressortait de travaux précédents {FAURRE 2,3} {KAILATH 3} le calcul du filtre optimal à partir de la covariance ne nécessite pas l'intégration successive de deux équations de Riccati (une pour obtenir la réalisation markovienne et une autre pour calculer le filtre), mais d'une seule conduisant à P_* et donc au filtre. C'est ce qui est exposé au chapitre 8, avec quelques points qui restent ouverts.

1.3 Il convient de remarquer que les résultats mathématiques que l'on présente ici sont susceptibles de plusieurs interprétations:

- comme le problème inverse que l'on vient d'exposer: une covariance étant donnée, chercher l'ensemble des réalisations markoviennes de ce processus;
- comme la théorie des systèmes dynamiques linéaires de type "positif" (voir {FAURRE 4}).

Le premier point de vue est le seul qui soit développé dans la suite de ce travail.

Le deuxième point de vue intervient aussi dans de nombreuses applications. Citons:

- la synthèse des réseaux électriques passifs à constantes localisées ({ANDERSON 4})
- l'hyperstabilité des systèmes linéaires à feedback nonlinéaire ({KALMAN 6}, POPOV, SZEGO, {YAKUBOVICH 1})
- le problème inverse de la commande optimale ({KALMAN 8}, {ANDERSON 1}).

CHAPITRE 2

STRUCTURE DES PROCESSUS GAUSSIENS-MARKOVIENS

2.1 - Processus à variance définie positive

Soit $\{x(t), t \in \mathcal{T}\}$ un processus vectoriel gaussien-markovien à valeur dans $\mathcal{R}^n$, de moyenne nulle

$$E\{x(t)\} = 0 \ , \tag{2.1}$$

à variance définie positive (donc inversible):

$$E\{x(t)x'(t)\} = \Lambda(t,t) > 0 \ . \tag{2.2}$$

La répartition de probabilité de $x(t)$ est parfaitement définie par la covariance

$$\Lambda(t,s) = E\{x(t)x'(s)\} \ (*) \ . \tag{2.3}$$

Définissons la matrice projecteur associée à ce processus

$$\Phi(t,s) = \Lambda(t,s)\Lambda^{-1}(s,s) \tag{2.4}$$

ainsi appelée car

$$E\{x(t)|x(s)\} = \Phi(t,s)x(s) \tag{2.5}$$

d'après le lemme suivant.

(*) On désignera par x', A', ... les matrices transposées de x, A, ...

LEMME (2.1)

Soit $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ un vecteur aléatoire gaussien centré de covariance $E\{x_i x_j'\}=\Sigma_{ij}$ avec Σ_{22} inversible, alors

$$E\{x_1|x_2\} = \Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1}\,x_2 \quad . \tag{2.6}$$

PREUVE

Remarquons d'abord que $y=x_1-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}x_2$ est gaussien centré. De plus $E\{yx_2'\}=0$, donc y et x_2 sont indépendants (car gaussiens centrés). Il s'ensuit que

$$E\{(x_1 - \Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1}\,x_2)\,\phi(x_2)\} = 0 \qquad \forall\ \phi(x_2) \in L^2 \tag{2.7}$$

d'où le résultat annoncé.

Le théorème suivant caractérise parmi les processus gaussiens centrés ceux qui sont markoviens.

THEOREME (2.1)

Le processus gaussien centré $\{x(t), t \in \mathcal{R}\}$ est markovien si et seulement si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est vérifiée:

i) $E\{x(t)|x(s_1),\ldots,x(s_k)\} = E\{x(t)|x(s_1)\}$

$\forall\ k, \forall\ t, s_1,\ldots,s_k$ tels que $t>s_1>\ldots>s_k$

ii) $E\{x(t)|x(s_1),x(s_2)\} = E\{x(t)|x(s_1)\}$

$\forall\ t, s_1, s_2$ tels que $t>s_1>s_2$

iii) $\Phi(t,s_2) = \Phi(t,s_1)\,\Phi(s_1,s_2)$ (2.8)

$\forall\ t, s_1, s_2$ tels que $t>s_1>s_2$.

DEMONSTRATION

1°) x(t) markovien $\Longleftrightarrow$ i)

Le processus x(t) est markovien si et seulement si les lois conditionnelles $\mathcal{L}\{x(t)|x(s_1),\ldots,x(s_k)\}$ et $\mathcal{L}\{x(t)|x(s_1)\}$ sont identiques. Le processus étant gaussien, ses lois conditionnelles sont gaussiennes (lemme (2.1)): l'identité des lois équivaut donc à l'identité des moyennes (propriété i)) et des variances.

Supposons i) vérifié et posons

$$y = x(t)-E\{x(t)|x(s_1),\ldots,x(s_k)\} = x(t)-E\{x(t)|x(s_1)\} \quad .$$

Par définition des moyennes conditionnelles

$$E\{yx'(s_i)\} = 0 \qquad i = 1,\ldots,k$$

et comme les vecteurs sont gaussiens centrés, y est <u>indépendant</u> de $x(s_i)$, $i=1,\ldots,k$. Il en découle donc l'identité des variances des deux lois conditionnelles considérées.

2°) <u>i) <==> ii)</u>

L'implication i)==>ii) est évidente.

Supposons ii) réalisé c'est à dire

$$E\{(x(t)-E\{x(t)|x(s_1)\})x'(s_i)\} = 0 \qquad s_i<s_1 \quad .$$

Il en résulte que $(x(t)-E\{x(t)|x(s_1)\})$ et $x(s_i)$ sont indépendants, d'où

$$E\{(x(t)-E\{x(t)|x(s_1)\})\ \phi(x(s_1),\ldots,x(s_k))\} = 0$$

$$\forall\ \phi(x(s_1),\ldots,x(s_k)) \in L^2$$

et par conséquent

$$E\{x(t)|x(s_1)\} = E\{x(t)|x(s_1),\ldots,x(s_k)\} \quad .$$

3°) <u>ii) <==> iii)</u>

Ainsi qu'il vient d'être vu au 2°), la propriété ii) équivaut à

$$E\{\,[x(t)-E\{x(t)|x(s_1)\}]\,x'(s_2)\} = 0 \qquad \forall\ t>s_1>s_2$$

d'où en utilisant le lemme (2.1)

$$\Lambda(t,s_2)-\Phi(t,s_1)\Lambda(s_1,s_2) = 0$$

soit encore en multipliant à droite par $\Lambda^{-1}(s_2,s_2)$

$$\Phi(t,s_2) = \Phi(t,s_1)\Phi(s_1,s_2) \qquad \forall\ t>s_1>s_2 \quad .$$

On peut déduire de la propriété iii) l'existence d'une matrice F(t) telle que $\Phi(t,s)$ soit la matrice de transition associée; c'est l'objet du lemme suivant.

LEMME (2.2)

Soit $\Phi(t,s)$ une matrice carrée n×n vérifiant les conditions suivantes dans $\mathbb{R}^2$:

i) $\Phi(t,t) = I \qquad \forall\, t$ (2.9)

ii) $\Phi(t,u) = \Phi(t,s)\Phi(s,u) \qquad \forall\, t>s>u$ (2.10)

iii) $\Phi(t,s)$ est dérivable en t_+ pour $t=s$.

Alors Φ est dérivable en t partout et il existe une matrice carrée n×n, F(t) telle que

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,s) = F(t)\Phi(t,s) \qquad t>s \ . \tag{2.11}$$

PREUVE

En effet de (2.10) il résulte (Δ étant positif) que

$$\frac{1}{\Delta}\{\Phi(t+\Delta,s)-\Phi(t,s)\} = \frac{1}{\Delta}\{\Phi(t+\Delta,t)-I)\}\Phi(t,s)$$

d'où le résultat annoncé en définissant

$$F(t) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Phi(t+\Delta,t)-I}{\Delta} \tag{2.12}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t_+}\Phi(t,s)\Big|_{t=s} \ .$$

On peut alors étendre le domaine de définition de Φ en posant

$$\Phi(s,t) = \Phi^{-1}(t,s) \qquad \text{si} \quad s<t \tag{2.13}$$

car on sait que Φ vérifiant (2.11) et (2.9) est régulière pour tout $t\geq s$.

De plus

$$\frac{\partial}{\partial s}\Phi(t,s) = -\Phi(t,s)F(s) \tag{2.14}$$

et les relations (2.11) et (2.14) sont vérifiées dans tout le plan.

On a vu que toute matrice projecteur $\Phi(t,s)$ vérifie i) (évident) et ii) (théorème (2.1)). Elle vérifie iii) si la covariance $\Lambda(t,s)$ est supposée dérivable en t_+ pour t=s.

Nous allons énoncer maintenant un résultat important.

THEOREME (2.2)

Le processus gaussien centré $\{x(t), t \in \mathbb{R}\}$ dont la covariance $\Lambda(t,s)$ vérifie les deux hypothèses

i) $\Lambda(t,s)$ est dérivable en t_+ pour t=s

ii) $\Lambda(s,s)$ est absolument continue par rapport à la variable s

est markovien si et seulement s'il vérifie l'équation différentielle stochastique linéaire

$$dx(t) = F(t)x(t)dt + dV(t) \quad . \tag{2.15}$$

où

$$F(t) = \frac{\partial}{\partial t_+} \Phi(t,s)\Big|_{t=s} \tag{2.16}$$

et $V(t)$ est un processus gaussien à accroissements indépendants:

$$E\{V(t)V'(s)\} = \int_0^{\min(t,s)} Q(\alpha)d\alpha \tag{2.17}$$

avec $$Q(\alpha) = \dot{\Lambda}(\alpha,\alpha) - F(\alpha)\Lambda(\alpha,\alpha) - \Lambda(\alpha,\alpha)F'(\alpha) \quad . \tag{2.18}$$

DEMONSTRATION

Introduisons d'abord le processus

$$I(t) = \Phi(0,t)x(t) - x(0) \quad . \tag{2.19}$$

Ce processus gaussien centré est à accroissements indépendants. En effet, si t>s, on peut voir que

$$E\{I(t)I'(s)\} = \Phi(0,s)\Lambda(s,s)\Phi'(0,s) - \Lambda(0,0)$$

en utilisant (2.4) et (2.10).

Désignant par $\dot{\Lambda}$ la dérivée p.p. de $\Lambda(s,s)$, on peut écrire

$$E\{I(t)I'(s)\} = \int_0^{\min(t,s)} \Phi(0,\alpha)Q(\alpha)\Phi'(0,\alpha)d\alpha$$

avec
$$Q(\alpha) = \dot{\Lambda}(\alpha,\alpha) - F(\alpha)\Lambda(\alpha,\alpha) - \Lambda(\alpha,\alpha)F'(\alpha) \qquad (2.20)$$

car

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\Phi(0,s)\Lambda(s,s)\Phi'(0,s) - \Lambda(0,0)\right]$$

p.p.
$$\Phi(0,s)\left[- F(s)\Lambda(s,s) - \Lambda(s,s)F'(s) + \dot{\Lambda}(s,s)\right]\Phi'(0,s) \quad .$$

Définissons maintenant le processus

$$V(t) = \int_0^t \Phi(s,0)dI(s) \text{ (intégrale stochastique)} \quad . \qquad (2.21)$$

C'est aussi un processus gaussien centré à accroissements indépendants tel que

$$E\{V(t)V'(s)\} = \int_0^{\min(s,t)} \Phi(\alpha,0)\Phi(0,\alpha)Q(\alpha)\Phi'(0,\alpha)\Phi'(\alpha,0)d\alpha$$

$$= \int_0^{\min(s,t)} Q(\alpha)d\alpha \quad . \qquad (2.22)$$

De plus I(t) s'exprime en fonction de V(t) par

$$I(t) = \int_0^t \Phi(0,s)dV(s) \qquad (2.23)$$

car

$$\int_0^t \Phi(0,s)dV(s) = \int_0^t \Phi(0,s)\Phi(s,0)dI(s) = \int_0^t dI(s) = I(t) \quad .$$

Utilisant la définition initiale (2.19) de I(t), il vient

$$x(t) = \Phi(t,0)x(0) + \int_0^t \Phi(t,s)dV(s) \qquad (2.24)$$

résultat qui peut s'exprimer encore sous la forme de l'équation différentielle stochastique linéaire

$$dx(t) = F(t)x(t)dt + dV(t) \quad . \qquad (2.25)$$

REMARQUES

1°) Le résultat précédent peut être énoncé sous une forme différente en disant que tout processus markovien x(t) (vérifiant les conditions du théorème) est l'état d'un système linéaire excité par un bruit blanc v(t):

$$\frac{d}{dt}\, x(t) = F(t)x(t) + v(t) \tag{2.26}$$

avec $$E\{v(t)v'(s)\} = Q(t)\delta(t-s) \quad . \tag{2.27}$$

2°) Si le processus markovien $\{x(t), t \in \mathbb{R}\}$ est stationnaire, on pose

$$E\{x(t+\tau)x'(t)\} = \Lambda(\tau) \tag{2.28}$$

$$\Lambda(0) = P(>0) \quad (*) \tag{2.29}$$

$$\Phi(\tau) = \Lambda(\tau)P^{-1} \quad \text{(pour } \tau>0) \quad . \tag{2.30}$$

Si Λ est dérivable en τ_+ ($\tau \geq 0$), il découle du lemme (2.2) que

$$\Phi(\tau) = e^{F\tau} \tag{2.31}$$

et d'après le théorème (2.2)

$$\dot{x} = Fx + v \tag{2.32}$$

avec $$E\{v(t)v'(s)\} = Q\delta(t-s) \tag{2.33}$$

et $$Q = - FP - PF' \quad . \tag{2.34}$$

De plus, la matrice

$$\begin{bmatrix} P & \Lambda'(\tau) \\ \Lambda(\tau) & P \end{bmatrix}$$

(*) On notera $A>0$ et $A\geq 0$ pour indiquer que la matrice symétrique A est définie-positive ou semi définie non négative. Plus généralement, on écrira $A>B$ ou $A\geq B$ si $A-B>0$ ou $A-B\geq 0$.

étant non négative définie, il s'ensuit que $\Lambda(\tau)$ et par conséquent $\Phi(\tau)$ sont bornés, d'où le résultat

$$F = \text{matrice stable}^{(*)} \quad . \tag{2.35}$$

2.2 - Décomposition canonique des processus gaussiens-markoviens stationnaires

Nous allons analyser de plus près dans ce paragraphe la structure d'un processus gaussien-markovien $\{x(t), t \in \mathcal{R}\}$ stationnaire de covariance

$$E\{x(t+\tau)x'(t)\} = \Lambda(\tau) \tag{2.36}$$

tel que $\frac{\partial}{\partial \tau_+} \Lambda(\tau)\big|_{\tau=0}$ existe.

1°) Variance semi définie positive

Supposons d'abord que $\Lambda(0)$ ne soit pas inversible. Cela entraîne l'existence d'un changement de base T, tel que

$$Tx = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad T\Lambda(0)T' = \begin{bmatrix} \Lambda_1(0) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

avec $$E\{x_1(t)x_1'(t)\} = \Lambda_1(0) > 0 \tag{2.38}$$

$$E\{x_2(t)x_2'(t)\} = 0$$

soit $$x_2(t) = 0 \quad \text{p.s.} \quad . \tag{2.39}$$

Il suit aisément que le processus $\{x_1(t), t \in \mathcal{R}\}$ est gaussien-markovien à variance définie-positive, ce qui nous ramène au cas traité au paragraphe précédent.

(*) Lorsqu'il s'agit - comme ici - d'un problème où $t \in \mathcal{R}$, une matrice F est dite stable si toutes ses valeurs propres sont à parties réelles négatives ou sur l'axe imaginaire en étant simples. Dans le cas où $t \in Z$, F est stable si toutes ses valeurs propres sont dans le cercle unité ou sur celui-ci en étant simples. Il s'ensuit que e^{Ft} (ou F^t) est borné si $t \to +\infty$.

Nous considérons à présent, pour ne pas alourdir les notations, un processus $x(t)$ à variance définie positive $(\Lambda(0)=P>0)$. On a vu (théorème (2.2)) que

$$\dot{x} = Fx + v \tag{2.40}$$

avec $$E\{v(t)v'(s)\} = Q\delta(t-s) \tag{2.41}$$

et $$Q = - FP - PF' \ . \tag{2.42}$$

De plus la covariance est donnée par

$$\Lambda(\tau) = \begin{cases} e^{F\tau} P & \tau \geq 0 \\ P\, e^{-F'\tau} & \tau \leq 0 \end{cases} \ . \tag{2.43}$$

On a vu (2.35) que F est une matrice stable, c'est à dire que ses valeurs propres $\lambda_j(F)$ sont dans la partie gauche du plan complexe ou sur l'axe imaginaire en étant simples. Nous allons voir que la décomposition de F en sa partie asymptotiquement stable ($\Re e\lambda_j(F)<0$) et en sa partie oscillatoire ($\Re e\lambda_j(F)=0$) correspond à la décomposition de Wold du processus $x(t)$ en sa partie purement non déterministique et sa partie déterministique.

Pour cela nous allons considérer d'abord deux cas particuliers.

2°) Matrice F asymptotiquement stable

Si F est asymptotiquement stable, la solution $x(t)$ de l'équation (2.40) peut s'écrire explicitement

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{F(t-s)} v(s)\, ds$$

ce qui entraîne que le processus $x(t)$ est purement non déterministique (au sens de la décomposition de Wold) .

De plus F étant asymptotiquement stable, il est connu que (2.42) considéré comme équation en P a une solution unique qui est donnée par

$$P = \int_0^{\infty} e^{Fs} Q\, e^{F's}\, ds \ . \tag{2.44}$$

L'hypothèse que P est positif défini entraîne {KALMAN 6} que le couple (F,L) est complètement commandable(*) pour toute matrice L telle que

$$Q = LL' \quad . \tag{2.45}$$

3°) Matrice F oscillatoire

Nous dirons qu'une matrice F est oscillatoire si toutes ses valeurs propres sont sur l'axe imaginaire et si elle a une structure simple (semblable à une matrice diagonale).

L'équation différentielle $\dot{x}=Fx+v$ ne peut alors définir un processus stationnaire que si $v=0$, soit

$$Q = 0 \quad . \tag{2.46}$$

Le processus correspondant est alors purement déterministique.

Dans ce cas P positif défini doit vérifier

$$FP + PF' = 0 \quad . \tag{2.47}$$

Il est connu qu'une telle solution existe si F est oscillatoire (théorie de Lyapunov).

En réunissant les résultats des 1°), 2°) et 3°), on a ainsi démontré le théorème suivant.

(*) Rappelons que le couple (F,L) est complètement commandable si et seulement si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée:

- quels que soient les états x_1 et x_2, il existe une commande u(t) faisant passer en un intervalle de temps fini l'état x(t) du système dynamique

$$\dot{x} = Fx + Lu$$

de l'état x_1 à l'état x_2

- on a $\quad \text{rang}\,[\,L, FL, \ldots, F^{n-1}L\,] = n$

- on a $\quad \int_0^s e^{Ft}\, LL'\, e^{F't}\, dt > 0$ pour tout $s > 0$.

THEOREME (2.3) (décomposition canonique d'un processus gaussien-markovien stationnaire)

Tout processus gaussien-markovien stationnaire $x(t)$ pour lequel $\frac{\partial}{\partial \tau_+} \Lambda(0)$ existe peut être considéré après un changement de base comme généré par l'équation différentielle linéaire stochastique

$$\dot{x} = Fx + v \tag{2.48}$$

avec $$E\{v(t)v'(s)\} = Q\delta(t-s) \tag{2.49}$$

et $$E\{x(t)x'(t)\} = P \tag{2.50}$$

où

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & F_{13} \\ 0 & F_2 & F_{23} \\ 0 & 0 & F_3 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.51}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.52}$$

avec

F_1 = matrice asymptotiquement stable

F_2 = matrice oscillatoire

(F_1, L_1) = paire complètement commandable avec $Q_1 = L_1 L_1'$

F_{13}, F_{23}, F_3 = matrices quelconques

P_1 = matrice positive définie solution de l'équation

$$F_1 P_1 + P_1 F_1' = - Q_1 \tag{2.53}$$

P_2 = matrice positive définie vérifiant l'équation

$$F_2 P_2 + P_2 F_2' = 0 \ . \tag{2.54}$$

La décomposition canonique correspondante est schématisée sur la figure 2-1 où x_1 est la partie purement non déterministique, x_2 est la partie déterministique et $x_3 = 0$ la partie non excitée du modèle.

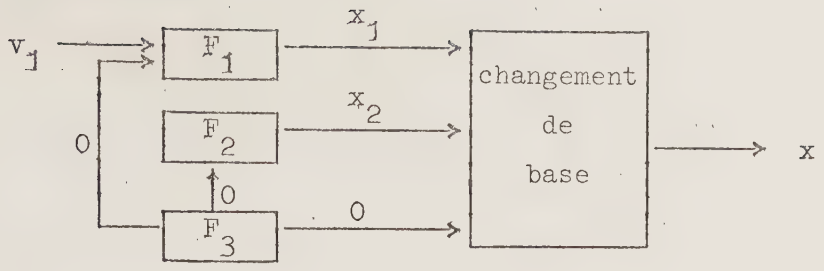


Figure 2-1 Décomposition canonique

Il découle de ce théorème que l'on pourra faire dans la suite l'hypothèse

F = matrice asymptotiquement stable

(F,L) = paire complètement commandable

qui entraîne P>0, car on n'élimine ainsi que des processus markoviens triviaux: purement déterministiques ou identiquement nuls.

2.3 - Cas discret

Tout ce qui vient d'être dit se transpose aisément au cas discret. Nous nous contenterons d'énoncer les résultats correspondants.

Soit $\{x(k), k \in Z\}$ un processus vectoriel gaussien-markovien de moyenne nulle et de covariance

$$E\{x(k)x'(j)\} = \Lambda(k,j) \quad . \tag{2.55}$$

On définit la matrice projecteur associée

$$\Phi(k,j) = \Lambda(k,j)\ \Lambda(j,j)^{-1} \tag{2.56}$$

lorsque $\Lambda(j,j)$ est inversible.

Le théorème (2.1) caractérisant parmi les processus gaussiens ceux qui sont markoviens s'applique sans modification .

Si l'on définit alors

$$F(k) = \Phi(k+1,k) \tag{2.57}$$

$$v(k) = x(k+1) - F(k)\,x(k) \tag{2.58}$$

on voit aisément que v(k) est un bruit blanc de covariance

$$E\{y(k)y'(j)\} = Q(k)\delta_{kj} \tag{2.59}$$

avec

$$Q(k) = \Lambda(k+1,k+1) - F(k)\Lambda(k,k)F'(k) \quad . \tag{2.60}$$

THEOREME (2.4)

Le processus gaussien centré $\{x(k), k \in Z\}$ dont la variance $\Lambda(j,j)$ est définie positive est markovien si et seulement s'il vérifie l'équation récurrente stochastique linéaire

$$x(k+1) = F(k)x(k) + v(k) \tag{2.61}$$

où

$$F(k) = \Lambda(k+1,k)\Lambda^{-1}(k,k) \tag{2.62}$$

et $v(k)$ est un bruit blanc de variance

$$Q(k) = \Lambda(k+1,k+1) - \Lambda(k+1,k)\Lambda^{-1}(k,k)\Lambda(k,k+1) \quad . \tag{2.63}$$

Dans le cas stationnaire, on pose

$$E\{x(k+j)x'(j)\} = \Lambda(k) \tag{2.64}$$

$$\Lambda(0) = P \tag{2.65}$$

$$F = \Lambda(1)\Lambda^{-1}(0) \quad . \tag{2.66}$$

Alors

$$\Lambda(k) = \begin{cases} F^k P & \text{si } k \geq 0 \\ P\ F'^{-k} & \text{si } k \leq 0 \end{cases} \tag{2.67}$$

et

$$x(k+1) = Fx(k) + v(k) \tag{2.68}$$

où $v(k)$ est un bruit blanc de covariance

$$Q = P - FPF' \quad . \tag{2.69}$$

De plus la matrice F est nécessairement stable.

Il existe une décomposition canonique identique à celle du cas continu (théorème 2.3) qui est exposée ci-après.

THEOREME (2.5) (décomposition canonique)

Tout processus gaussien-markovien stationnaire $x(k)$ peut être considéré après un changement de base comme généré par l'équation récurrente

$$x(k+1) = Fx(k) + v(k) \tag{2.70}$$

avec $$E\{v(k)v'(j)\} = Q\delta_{kj} \tag{2.71}$$

et $$E\{x(k)x'(k)\} = P \tag{2.72}$$

où

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & F_{13} \\ 0 & F_2 & F_{23} \\ 0 & 0 & F_3 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.73}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.74}$$

avec

F_1 = matrice asymptotiquement stable (valeurs propres à l'intérieur du cercle unité)

F_2 = matrice oscillatoire (semblable à une matrice diagonale et à valeurs propres sur le cercle unité)

(F_1, L_1) = paire complètement commandable avec $Q_1 = L_1 L_1'$

F_{13}, F_{23}, F_3 = matrices quelconques

P_1 = matrice positive définie solution de l'équation

$$P_1 - F_1 P_1 F_1' = Q_1 \tag{2.75}$$

P_2 = matrice positive définie vérifiant l'équation

$$P_2 - F_2 P_2 F_2' = 0 \quad . \tag{2.76}$$

La décomposition canonique correspondante est schématisée sur la figure 2-1 où x_1 et x_2 sont respectivement les parties purement non déterministique et déterministique du processus.

2.4 - Commentaires et bibliographie

Les processus gaussiens-markoviens sont étudiés depuis longtemps. Par exemple le critère du théorème (2.1) est cité dans {DOOB 1,2}, FELLER, {KALMAN 9}, FRANKLIN.

En ce qui concerne la décomposition canonique de ces processus dans le cas stationnaire, on consultera {DOOB 1}, {FAURRE 1}.

Cette décomposition canonique est voisine de la décomposition des systèmes dynamiques linéaires en parties complètement commandable et non commandable (voir {KALMAN 3,5}). De même que cette décomposition s'étend au cas non stationnaire, il serait possible d'étendre ce résultat au cas des processus gaussiens-markoviens non stationnaires.

Pour plus de détails sur les équations de Lyapunov (2.53), (2.54), (2.75) et (2.76), on se reportera à {KALMAN 6}.

Les processus poissoniens-markoviens qui ont eux aussi un grand intêret pratique pour représenter certains phénomènes physiques (bruit de grenaille, perturbations mécaniques, etc...) peuvent être analysés et devraient conduire à des représentations analogues à celles présentées dans ce travail. Voir à ce sujet {BLANC-LAPIERRE 2,3}.

CHAPITRE 3

PROCESSUS A REPRESENTATION MARKOVIENNE

3.1 - Introduction

Pour tous les problèmes de commande déterministe, les modèles d'état ont acquis une grande importance et l'on cherche en conséquence à donner cette représentation aux systèmes dynamiques déterministes.

De même pour les problèmes de filtrage ou de commande stochastique, on est conduit à donner une représentation markovienne aux processus aléatoires considérés, c'est à dire à les représenter à l'aide d'un processus markovien auxiliaire. Cette approche est justifiée par l'analogie qui existe entre la notion de processus markovien et celle d'état pour un système dynamique déterministe.

Cette idée est traduite dans la définition suivante.

DEFINITION (3.1) (représentation markovienne)

Un processus gaussien centré $y(t)$ est dit admettre une représentation markovienne s'il existe un processus markovien $x(t)$ (non nécessairement de la même dimension) et un bruit blanc $w(t)$ tels que

$$y(t) = H(t)x(t) + w(t) \quad . \tag{3.1}$$

On se limitera dans la suite au cas stationnaire et on supposera de plus que $y(t)$ est purement non déterministique. On utilisera ainsi les résultats établis au chapitre précédent pour le processus markovien $x(t)$.

1ère PARTIE

CAS CONTINU

3.2 - Réalisations markoviennes

Utilisant le théorème (2.3), on est conduit à la définition suivante.

DEFINITION (3.2) (réalisation markovienne, cas continu)

On appelle réalisation markovienne (si elle existe) d'un processus gaussien centré stationnaire $y(t)$ un modèle de la forme

$$\dot{x} = Fx + v \tag{3.2}$$

$$y = Hx + w \tag{3.3}$$

où $\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$ est un bruit blanc de covariance

$$E\left\{\begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} [v'(s)w'(s)]\right\} = \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \delta(t-s) \tag{3.4}$$

et pour lequel les conditions suivantes sont vérifiées:

F = matrice asymptotiquement stable (3.5)

(F,L) = paire complètement commandable avec $Q = LL'$ (3.6)

$$(H,F) = \underline{\text{paire complètement observable}}^{(*)} \quad . \tag{3.7}$$

La covariance du processus $y(t)$ ainsi représenté

$$\Lambda(\tau) = E\{y(t+\tau)y'(t)\}$$

$$= E\{\left[H\int_0^\infty e^{F\alpha}\, v(\tau-\alpha)d\alpha + w(\tau)\right]\left[\int_0^\infty v'(-\beta)e^{F'\beta}\, d\beta\, H' + w'(0)\right]\}$$

est donc de la forme

$$\Lambda(\tau) = He^{F\tau}\, G\varepsilon(\tau) + G'e^{-F'\tau}\, H'\varepsilon(-\tau) + R\delta(\tau) \tag{3.8}$$

où l'on a posé

$$G = PH' + S \tag{3.9}$$

$$\varepsilon(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau<0 \\ 1/2 & \text{si } \tau=0 \\ 1 & \text{si } \tau>0 \end{cases}$$

et où $\delta(\tau)$ est l'impulsion de Dirac.

Le spectre de $y(t)$, transformée de Laplace de $\Lambda(\tau)$, est alors de la forme

$$S(s) = \mathcal{L}\{\Lambda(\tau)\} = R + H(sI-F)^{-1}\, G + G'(-sI-F')^{-1}\, H' \quad . \tag{3.10}$$

(*) Rappelons que la paire de matrices (H,F) est dite <u>complètement observable</u> si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée:

- quel que soit l'état initial $x(0)$, il est possible de le déterminer de façon unique à partir de l'observation de $y(\alpha)$ sur un intervalle de temps fini $[0,T]$ pour le système libre

$$\dot{x} = Fx$$

$$y = Hx$$

- on a $\quad \text{rang} \begin{bmatrix} H' \\ H'F' \\ \vdots \\ H'F'^{n-1} \end{bmatrix} = n$

- on a $\quad \int_0^s e^{F't}\, H'He^{Ft}\, dt > 0$ pour tout $s > 0$.

On remarque immédiatement que S(s) est rationnel en s et parahermitien (S(s)=S'(-s)) (*).

Nous sommes en mesure à présent de poser le problème de la réalisation markovienne.

PROBLEME DE LA REALISATION MARKOVIENNE

Etant donné un processus gaussien centré stationnaire purement non déterministique y(t) de covariance $\Lambda(\tau)$, trouver (s'il n'est pas vide) l'ensemble des modèles markoviens du type (3.2)-(3.7) permettant de le représenter.

Tenant compte des relations (3.8) et (3.10), il est clair qu'une condition nécessaire pour que cet ensemble ne soit pas vide est que $\Lambda(\tau)$ soit une fonction parasymétrique à transformée rationnelle tendant vers 0 lorsque $t \to \pm \infty$. En effet une telle fonction peut être mise sous la forme (3.8) (ou sa transformée de Laplace sous la forme (3.10)) en utilisant des algorithmes (du genre factorisation de matrices de Hankel) décrits en détail dans HO, IRVING, RISSANEN.

Se limitant aux réalisations de dimensions minimales, il est alors prouvé dans HO que pour une fonction $\Lambda(\tau)$ donnée, R, H, F et G sont définis à un changement de base près: R, $\hat{H}=HT$, $\hat{F}=T^{-1}FT$ et $\hat{G}=T^{-1}G$ représentent aussi $\Lambda(\tau)$ par (3.8) si R, H, F, G le représentent. D'autre part les couples (H,F) et (F,G) sont complètement observable et complètement commandable, ceci résultant de la minimalité de la dimension de F.

Supposant la base choisie (c'est à dire un triplet {H,F,G}), on peut alors énoncer le critère suivant.

THEOREME (3.1) (réalisations markoviennes, cas continu, 1ère forme)

L'ensemble des réalisations markoviennes d'un processus y(t) de covariance $\Lambda(\tau)$ donnée par (3.8) est caractérisé (dans une base donnée) par les équations (3.2)-(3.3) et l'ensemble des matrices P, Q (symétriques) et S telles que

$$FP + PF' = -Q \tag{3.11}$$

$$G - PH' = S \tag{3.12}$$

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \geq 0 \quad , \quad P \geq 0 \tag{3.13}$$

(*) Propriété correspondant à la parasymétrie de $\Lambda(\tau)$:

$$\Lambda(-\tau) = \Lambda'(\tau) \quad .$$

$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix}$ étant alors la covariance du bruit blanc du modèle (3.2)-(3.3) et P la covariance du processus markovien x(t).

On a déja vu que le modèle (3.2)-(3.3) excité par le bruit blanc de covariance (3.4) génère un processus y(t) de covariance (3.8).

Inversement un processus de covariance (3.8) ne peut être généré par un tel modèle que s'il existe des matrices P, Q et S telles que les relations (2.42) et (3.9) soient vérifiées et de plus

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \geq 0 \qquad \text{et} \qquad P \geq 0$$

car ce sont des covariances.

Si l'on remarque que la condition

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.14}$$

équivaut à l'existence de matrices L et J telles que

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ J \end{bmatrix} \begin{pmatrix} L' & J' \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

ou encore

$$Q = LL' \tag{3.16}$$

$$S = LJ' \tag{3.17}$$

$$R = JJ' \tag{3.18}$$

le théorème (3.1) peut être énoncé sous la forme équivalente suivante.

THEOREME (3.2) (réalisations markoviennes, cas continu, 2ème forme)

Sous les mêmes conditions qu'au théorème (3.1), l'ensemble des réalisations markoviennes est caractérisé par l'ensemble des matrices P, L, J telles que

$$FP + PF' = - LL' \tag{3.19}$$

$$G - PH' = LJ' \tag{3.20}$$

$$R = JJ' \tag{3.21}$$

$$P \geq 0 \ . \tag{3.22}$$

REMARQUES

1°) La condition $P \geq 0$ est presque redondante dans les théorèmes (3.1) et (3.2) car F étant asymptotiquement stable (hypothèse (3.5)), la condition $Q=LL'$ avec (F,L) complètement commandable entraîne $P>0$ (théorie de Lyapunov).

2°) Il convient de noter que dans le théorème (3.2) les matrices L et J sont $n \times k$, $m \times k$, k étant a priori variable.

3°) Les relations (3.11)-(3.13) ou les relations équivalentes (3.19)-(3.22) joueront un rôle important dans la suite de ce travail. Dans ce chapitre on a montré qu'elles équivalaient aux représentations markoviennes du processus y(t) de covariance $\Lambda(\tau)$. Au chapitre suivant, on montrera qu'elles équivalent au caractère réel positif de la fonction $\Lambda(\tau)$ (lemme positif réel énoncé dans le théorème (4.1)).

3.3 - Réalisations markoviennes et factorisations spectrales

Les relations algébriques (3.11)-(3.12) ou (3.19)-(3.21) ont une interprétation en termes de factorisation. Définissons d'abord ce terme.

DEFINITION (3.3) (factorisation, cas continu)

Une fonction matricielle $m \times m$ parahermitienne S(s) est dite admettre une factorisation faible si on peut l'écrire sous la forme

$$S(s) = H(s)\, H'(-s) \tag{3.23}$$

le facteur H(s) (matriciel $m \times p$) étant analytique dans le demi plan complexe $\mathcal{R}e\ s \geq 0$. Une telle factorisation est dite factorisation forte si le facteur H(s) est de plus carré ($m \times m$) et tel que dét $H(s) \neq 0$ dans $\mathcal{R}e\ s \geq 0$.

On voit évidemment qu'une condition nécessaire pour l'existence d'une factorisation est que $S(j\omega)\geq 0$ sur l'axe imaginaire $s=j\omega$.

Nous pouvons alors interpréter en termes de factorisations les relations des théorèmes (3.1) et (3.2).

THEOREME (3.3)

Sous les hypothèses (3.6)-(3.7), les relations (3.11)-(3.12) équivalent à l'identité

$$R + H(sI-F)^{-1} G + G'(-sI-F')^{-1} H'$$

$$= \left[H(sI-F)^{-1},I\right] \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-sI-F')^{-1} H' \\ I \end{bmatrix} \qquad (3.24)$$

et les relations (3.19)-(3.21) équivalent à l'identité

$$R + H(sI-F)^{-1} G + G'(-sI-F')^{-1} H'$$

$$= \left[J + H(sI-F)^{-1} L\right] \left[J' + L'(-sI-F')^{-1} H'\right] \qquad (3.25)$$

c'est à dire que $H(s)=J+H(sI-F)^{-1}L$ est un facteur faible du spectre (3.18).

DEMONSTRATION

Nous allons commencer par démontrer (3.24).

Supposons (3.11) et (3.12) vérifiés, alors

$$R + H(sI-F)^{-1} G + G'(-sI-F')^{-1} H'$$

$$= R + H(sI-F)^{-1} S + S'(-sI-F')^{-1} H' + H(sI-F)^{-1} PH' + HP(-sI-F')^{-1} H' \qquad (3.26)$$

(d'après (3.12))

$$= R+H(sI-F)^{-1}S+S'(-sI-F')^{-1}H'+H(sI-F)^{-1}\left[P(-sI-F')+(sI-F)P\right](-sI-F')^{-1}H'$$

$$= R + H(sI-F)^{-1} S + S'(-sI-F')^{-1} H' + H(sI-F)^{-1} Q(-sI-F')^{-1} H'$$

(d'après 3.11)

qui n'est autre que l'égalité (3.24).

Inversement supposons vérifiée (3.24).

Definissons alors P comme l'unique solution de (3.11):

$$FP + PF' = - Q .$$

Il est alors clair (remonter les calculs) que (3.26) est vérifiée. Identifiant les parties analytiques dans $\mathcal{R}e\ s \geq 0$ dans les deux membres de cette égalité, il vient

$$H(sI-F)^{-1} G = H(sI-F)^{-1} (PH'+S)$$

et d'après la minimalité de {H,F,G} (hypothèses (3.6) et (3.7)), il en découle

$$G = PH' + S$$

qui n'est autre que la relation (3.12).

Ecrivant

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ J \end{bmatrix} (L'J')$$

on en déduit aisément (3.25) et le théorème est démontré car $H(s)=H(sI-F)^{-1}L+J$ est évidemment analytique dans $\mathcal{R}e\ s \geq 0$ et donc facteur faible.

2ème PARTIE

CAS DISCRET

3.4 - Réalisations markoviennes

Utilisant le théorème (2.5), on est conduit à la définition suivante.

DEFINITION (3.4) (réalisation markovienne, cas discret)

On appelle réalisation markovienne (si elle existe) d'un processus gaussien centré stationnaire $y(k)$ un modèle de la forme

$$x(k+1) = Fx(k) + v(k) \tag{3.27}$$

$$y(k) = Hx(k) + w(k) \tag{3.28}$$

où $\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$ est un bruit blanc de covariance

$$E\{ \begin{bmatrix} v(k) \\ w(k) \end{bmatrix} [v'(j)\ w'(j)] \} = \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \delta_{kj} \tag{3.29}$$

avec les hypothèses suivantes:

F = matrice asymptotiquement stable (3.30)

(F,L) = paire complètement commandable (3.31)

(H,F) = paire complètement observable. (3.32)

La covariance du processus y(k) ainsi représenté

$$\Lambda(k) = E\{y(j+k)\ y'(j)\}$$

est, ainsi qu'on le voit aisément, de la forme

$$\Lambda(k) = HF^{k-1}\ G\varepsilon_k + G'F'^{-k-1}\ H'\varepsilon_{-k} + \Lambda_0\ \delta_{k0} \qquad (3.33)$$

où l'on a posé

$$\Lambda_0 = HPH' + R \qquad (3.34)$$

$$G = FPH' + S \qquad (3.35)$$

et $$\varepsilon_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k>0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} .$$

Le spectre de y(k), transformée en z de $\Lambda(k)$, est alors de la forme

$$S(z) = \sum_i \Lambda(i) z^{-i}$$

$$= \Lambda_0 + H(zI-F)^{-1}\ G + G'(z^{-1}I-F')^{-1}\ H' \quad . \qquad (3.36)$$

On remarque aussitôt que S(z) est rationnel et parahermitien discret ($S(z)=S'(z^{-1})$)(*).

Le problème de la réalisation markovienne est encore de chercher l'ensemble des modèles du type (3.27)-(3.32) pour un processus gaussien centré stationnaire donné y(k) de covariance $\Lambda(k)$.

Les résultats équivalents aux théorèmes (3.1) et (3.2) sont alors les suivants.

THEOREME (3.4) (réalisations markoviennes, cas discret)

L'ensemble des réalisations markoviennes d'un processus y(k) de covariance $\Lambda(k)$ donnée par (3.33) est caractérisé par les équations (3.27)-(3.28) et l'ensemble des matrices P, Q (symétriques) et S telles que

---

(*) Propriété correspondant à la parasymétrie de $\Lambda(k)$:

$$\Lambda(-k) = \Lambda'(k) \quad .$$

$$P - FPF' = Q \tag{3.37}$$

$$G - FPH' = S \tag{3.38}$$

$$\Lambda_0 - HPH' = R \tag{3.39}$$

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \geq 0 \ , \quad P \geq 0 \tag{3.40}$$

$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix}$ étant alors la covariance du bruit blanc du modèle (3.27)-(3.28) et P la covariance du processus markovien x(k).

On peut aussi caractériser cet ensemble par l'ensemble des matrices P, L, J telles que

$$P - FPF' = LL' \tag{3.41}$$

$$G - FPH' = LJ' \tag{3.42}$$

$$\Lambda_0 - HPH' = JJ' \tag{3.43}$$

$$P \geq 0 \ . \tag{3.44}$$

La démonstration et les remarques du cas continu se transposent sans difficultés ici.

3.5 - Réalisations markoviennes et factorisation spectrale

La définition d'une factorisation faible ou forte se transpose aisément dans le cas discret:

$$S(z) = H(z)\ H'(z^{-1}) \tag{3.45}$$

H(z) étant analytique à l'extérieur du cercle unité, et de plus carré et tel que dét H(z)≠0 à l'extérieur du cercle unité pour une factorisation forte.

L'analogue - aisément démontré - du théorème (3.3) est alors le suivant.

THEOREME (3.5)

Sous les hypothèses (3.31)-(3.32), les relations (3.37)-(3.39) équivalent à l'identité

$$\Lambda_0 + H(zI-F)^{-1} G + G'(z^{-1}I-F')^{-1} H'$$

$$= [H(zI-F)^{-1},I] \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (z^{-1}I-F')^{-1} H' \\ I \end{bmatrix} \qquad (3.46)$$

et les relations (3.41)-(3.43) équivalent à l'identité

$$\Lambda_0 + H(zI-F)^{-1} G + G'(z^{-1}I-F')^{-1} H'$$

$$= [J + H(zI-F)^{-1} L] [J' + L'(z^{-1}I-F')^{-1} H'] \qquad (3.47)$$

c'est à dire que $H(z)=J+H(zI-F)^{-1}L$ est un facteur faible du spectre (3.36).

3.6 - Commentaires et bibliographie

Les processus autorégressifs à moyenne glissante (moving average autoregressive processes) sont employés depuis longtemps par les statisticiens (BOX et JENKINS). Or ces processus ne sont, dans le cas scalaire, rien d'autre que les processus à représentation markovienne représentés dans une base canonique.

Le problème de la réalisation markovienne semble avoir été posé pour la première fois dans {KALMAN 9}. Voir aussi {FAURRE 1}, {ANDERSON 6}. Dans le chapitre présent, ce problème est généralisé par rapport aux travaux précédents en admettant (i) une matrice R non nécessairement nulle ({KALMAN 9}, {FAURRE 1}) ou définie positive ({ANDERSON 6}) mais quelconque, (ii) une corrélation entre les bruits v et w (matrice S) ce qui n'a pas été fait dans les travaux précédents. Cette généralisation permettra de faire apparaitre le filtre comme une réalisation markovienne particulière (chapitre 7).

Les travaux sur la factorisation sont très nombreux. Citons GOHBERG, WIENER, MASANI.

La liaison entre la factorisation de fonctions rationnelles et des relations algébriques du type (3.11)-(3.12) a été introduite, simultanément semble-t-il, pour des questions d'hyperstabilité (voir chapitre 1, paragraphe 1.3) dans {YAKUBOVICH 1}, {KALMAN 6} et POPOV, ce dernier papier étant le plus général.

CHAPITRE 4

LEMME POSITIF REEL ET DUALITE

1ère PARTIE

CAS CONTINU

4.1 - Enoncé du lemme positif réel continu

L'objet de cette partie est de démontrer un critère caractérisant les fonctions $\Lambda(\tau)$ à transformées rationnelles qui sont de type réel positif ou réel non négatif au sens de la définition suivante.

DEFINITION (4.1)

La fonction matricielle $\Lambda(\tau)$ parasymétrique (c'est-à-dire telle que $\Lambda(-\tau) = \Lambda'(\tau)$) est de type réel positif (réel non négatif) si quelle que soit la fonction $u(\alpha)$ non nulle à support compact, on a

$$\iint u'(\alpha)\ \Lambda(\beta-\alpha)\ u(\beta)\ d\alpha\ d\beta > 0 \qquad (\text{réel positif}) \tag{4.1}$$

$$\{ \geq 0 \qquad (\text{réel non négatif})\} \quad . \tag{4.2}$$

Faisons la remarque utile pour la suite que la forme bilinéaire définie par (4.1) est de Toeplitz, c'est à dire invariante par translation:

$$\iint u'(\alpha)\ \Lambda(\beta-\alpha)\ u(\beta)\ d\alpha\ d\beta = \iint u'(\alpha+T)\ \Lambda(\beta-\alpha)\ u(\beta+T)\ d\alpha\ d\beta \quad . \tag{4.3}$$

Nous restreignons la classe de fonctions parasymétriques considérées pour $\Lambda(\tau)$ à la classe des fonctions parasymétriques à transformées rationnelles.
Une telle fonction peut être représentée sous la forme

$$\Lambda(\tau) = He^{F\tau} G\, \varepsilon(\tau) + G' e^{-F'\tau} H'\, \varepsilon(-\tau) + R\delta(\tau) \tag{4.4}$$

avec les hypothèses:

(H,F) = couple complètement observable, (4.5)

(F,G) = couple complètement commandable, (4.6)

F = matrice asymptotiquement stable. (4.7)

Rappelons aussi que

$$\varepsilon(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau<0 \\ 1/2 & \text{si } \tau=0 \\ 1 & \text{si } \tau>0 \end{cases}$$

et que $\delta(\tau)$ est l'impulsion de Dirac.
En effet la fonction (4.4) a la transformée de Laplace

$$S(s) = \mathcal{L}\{\Lambda(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau$$

$$= R + H(sI-F)^{-1} G + G'(-sI-F')^{-1} H' \tag{4.8}$$

qui est bien rationnelle en s. Inversement toute fonction S(s) rationnelle parahermitienne (telle que $S(-s)=S'(s)$) peut s'écrire sous la forme (4.8) avec les hypothèses (4.5)-(4.7) et par conséquent correspond à une fonction du type (4.4).

Le lemme positif réel continu est alors le suivant.

THEOREME (4.1) (lemme positif réel continu)

$\Lambda(\tau)$ donné par l'expression (4.4) est de type réel non négatif si et seulement s'il existe trois matrices P, Q, S (P et Q symétriques) telles que

$$FP + PF' = -Q \tag{4.9}$$

$$G - PH' = S \tag{4.10}$$

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \geq 0 \quad , \quad P \geq 0 \quad . \tag{4.11}$$

4.2 - Démonstration du lemme positif réel continu

Pour la démonstration, nous aurons à utiliser le lemme suivant.

LEMME (4.1)

Si les relations (4.9) et (4.10) sont vérifiées, alors

$$U'AU = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} u'(\alpha)\Lambda(\beta-\alpha)u(\beta)d\alpha\, d\beta$$

$$= x'(0)Px(0) + \int_{-\infty}^{0}(x'Qx+u'Ru+2x'Su)d\tau \qquad (4.12)$$

avec $$x(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{F'(\tau-\alpha)}\, H'u(\alpha)d\alpha \qquad (4.13)$$

ou encore

$$\dot{x} = F'x + H'u \qquad (4.14)$$

$$x(-\infty) = 0$$

pour toute fonction $u(\alpha)$ à support compact.

En effet, utilisant les relations (4.9) et (4.10), on obtient

$$\int_{-\infty}^{0}(x'Qx+u'Ru+2x'Su)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\{-x'(FP+PF')x + 2x'(G-PH')u + u'Ru\}d\tau$$

(en utilisant (4.13) et (4.14))

$$= \int_{-\infty}^{0}\{(-\dot{x}'+u'H)Px + x'P(-\dot{x}+H'u) + x'(G-PH')u + u'(G'-HP)x + u'Ru\}d\tau$$

$$= -x'Px\Big|_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0}d\tau\int_{-\infty}^{\tau}u'(\alpha)He^{F(\tau-\alpha)}Gu(\tau)d\alpha + \int_{-\infty}^{0}d\tau\int_{-\infty}^{\tau}u'(\tau)G'e^{F'(\tau-\alpha)}H'u(\alpha)d\alpha + \int_{-\infty}^{0}u'Ru\, d$$

$$= -x'(0)Px(0) + \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} u'(\alpha)\Lambda(\tau-\alpha)u(\tau)d\alpha\, d\tau$$

d'après la définition (4.4) de $\Lambda(.)$.

DEMONSTRATION DU THEOREME (4.1)

1°) Condition suffisante

S'il existe P, Q et S vérifiant (4.9)-(4.11) il est clair que le second membre de (4.12) est non négatif, et par suite du lemme (4.1), $\Lambda(.)$ est de type réel non négatif.

2°) Condition nécessaire

Supposons $\Lambda(.)$ de type réel non négatif et définissons P^* par

$$x'P^*x = \inf_{u(.)\in \mathcal{C}(x)} U'\Lambda U \qquad (4.15)$$

où U représente l'application u(.) ,

$$U'\Lambda U = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} u'(\alpha)\Lambda(\beta-\alpha)u(\beta)d\alpha\, d\beta \qquad (4.16)$$

et $\mathcal{C}(x)$ est l'ensemble non vide (hypothèse (4.5)) des fonctions u(.) à support compact transférant le système (F',H') de l'état 0 à l'état x:

$$\mathcal{C}(x) = \{u(.)\,|\, x = \int_{-\infty}^{0} e^{-F'\alpha} H'u(\alpha)d\alpha\} \quad . \qquad (4.17)$$

La définition (4.15) est cohérente: en effet l'infimum existe et est non négatif car $\Lambda(.)$ est de type réel non négatif; d'autre part cette infimum est bien une forme quadratique car infimum d'une fonctionnelle quadratique sous contrainte linéaire; la matrice P^* est donc bien définie et non négative définie.

Définissons à présent

$$Q^* = -(FP^*+P^*F') \qquad (4.18)$$

$$S^* = G - P^*H' \quad . \qquad (4.19)$$

Considérons une commande U=u(α) qui transfère le système (F',H') dans l'état ξ à l'instant 0, puis la commande V ainsi définie

$$V = v(\alpha) = \begin{cases} u(\alpha+\Delta t) & \text{pour} \quad \alpha \le -\Delta t \\ u_0 & \text{pour} \quad -\Delta t \le \alpha \le 0 \end{cases} \quad . \qquad (4.20)$$

Cette commande transfère le système dans l'état ζ à l'instant 0.

Utilisant le caractère de Toeplitz de Λ d'une part (voir (4.3)), le lemme (4.1) d'autre part, il vient à un terme $0(\Delta t^2)$ près:

$$\Delta t(\xi'Q^*\xi+u_0'R^*u_0+2\xi'S^*u_0) = (V'\Lambda V-\zeta'P^*\zeta) - (U'\Lambda U-\xi'P^*\xi) \quad . \qquad (4.21)$$

Par suite de la définition de P^*:

i) $V'\Lambda V - \zeta' P^{*}\zeta \geq 0$

ii) $U'\Lambda U - \xi' P^{*}\xi (\geq 0)$ peut être rendu arbitrairement petit par choix convenable de U.

Donc

$$(\xi', u_0') \begin{bmatrix} Q^{*} S^{*} \\ S^{*\prime} R^{*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ u_0 \end{bmatrix} \geq 0 \quad . \tag{4.22}$$

Les vecteurs ξ (complète commandabilité) et u_0 étant arbitraires, on a bien

$$\begin{bmatrix} Q^{*} S^{*} \\ S^{*\prime} R^{*} \end{bmatrix} \geq 0 \quad . \tag{4.23}$$

2ème PARTIE

CAS DISCRET

4.3 - Enoncé du lemme positif réel discret

Considérons à présent une suite $\Lambda(k)$ à transformée rationnelle, qui sera représentée sous la forme

$$\Lambda(k) = \Lambda_0 \delta_k + HF^{k-1} G\varepsilon_k + G'F'^{-k-1} H'\varepsilon_{-k} \qquad (4.24)$$

avec

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k > 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

et les hypothèses

(H,F) = couple complètement observable (4.25)

(F,G) = couple complètement commandable (4.26)

F = matrice asymptotiquement stable. (4.27)

Dans le cas discret, l'analogue du théorème (4.1) est le suivant.

THEOREME (4.2) (lemme positif réel discret)

$\Lambda(k)$ donné par l'expression (4.24) est de type réel non négatif si et seulement s'il existe quatre matrices P, Q, R, S (P, Q et R symétriques) telles que

$$P - FPF' = Q \tag{4.28}$$

$$G - FPH' = S \tag{4.29}$$

$$\Lambda_0 - HPH' = R \tag{4.30}$$

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \geq 0 \ , \ P \geq 0 \ . \tag{4.31}$$

4.4 - Démonstration du lemme positif réel discret

Nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME (4.2)

Si les relations (4.28) à (4.30) sont vérifiées, alors

$$U'\Lambda U = x'(0)Px(0) + \sum_{i=-\infty}^{-1} \{x'Qx + u'Ru + 2x'Su\} \tag{4.32}$$

où U représente la suite u(.) et

$$U'\Lambda U = \sum_{-\infty}^{-1} \sum_{-\infty}^{-1} u'(i)\Lambda(j-i)u(j) \tag{4.33}$$

et $$x(i) = \sum_{k=-\infty}^{i-1} F'^{i-k-1} H'u(k) \tag{4.34}$$

ou encore

$$x(i+1) = F'x(i) + H'u(i) \tag{4.35}$$

$$x(-\infty) = 0 \ .$$

La démonstration du lemme est la suivante.
Remarquons d'abord, en utilisant (4.34) et (4.35), que

$$\Delta(x'Px) = x'(i+1)Px(i+1) - x'(i)Px(i)$$

$$= (x'(i)F + u'(i)H)P(F'x(i) + H'u(i)) - x'(i)Px(i)$$

(en utilisant (4.28) à (4.30))

$$= - \{x'(i)Qx(i)+u'(i)Ru(i)+2x'(i)Su(i)\} + u'(i)\Lambda_0 u(i) + 2x'(i)Gu(i) \ .$$

Il s'ensuit que

$$x'(0)Px(0) + \sum_{-\infty}^{-1} \{x'Qx+u'Ru+2x'Su\}$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{-1} \{u'(i)\Lambda_0 u(i)+ \sum_{k=-\infty}^{i-1} u'(i)G'F'^{i-k-1} H'u(k)+ \sum_{k=-\infty}^{i-1} u'(k)HF^{i-k-1} Gu(i)\}$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{k=-\infty}^{-1} u'(k)\Lambda(i-k)u(i)$$

d'après la définition (4.24) de $\Lambda(.)$.

DEMONSTRATION DU THEOREME (4.2)

1°) Condition suffisante

S'il existe P, Q et S vérifiant (4.28)-(4.31), il est clair que le second membre de (4.32) est non négatif, et par suite du lemme (4.2), $\Lambda(.)$ est de type réel non négatif.

2°) Condition nécessaire

Supposons $\Lambda(.)$ de type réel non négatif et définissons P^* par

$$x'P^*x = \inf_{U \in \mathcal{C}(x)} U'\Lambda U \qquad (4.36)$$

où $\mathcal{C}(x)$ est l'ensemble des suites U

$$\mathcal{C}(x) = \{u(.) \mid x = \sum_{-\infty}^{-1} F'^{-i-1} H'u(i)\} \quad . \qquad (4.37)$$

Pour les mêmes raisons que dans le cas continu, cette définition est cohérente et P^* est une matrice non négative définie.

Définissons à présent

$$Q^* = P^* - FP^*F' \qquad (4.38)$$

$$S^* = G - FP^*H' \qquad (4.39)$$

$$R^* = \Lambda_0 - HP^*H' \quad . \qquad (4.40)$$

Nous allons prouver que

$$\begin{bmatrix} Q^* & S^* \\ S'^* & R^* \end{bmatrix} \geq 0 \quad , \qquad (4.41)$$

ce qui achèvera la démonstration.

Considérons pour cela la suite $U=\{u(i), i\leq -1\}$ qui conduit le système (F',H') dans l'état ξ à l'instant 0 et la suite $V=\{v(i), i\leq -1\}$ avec $v(i)=u(i+1)$ pour $i<-1\}$ qui conduit par conséquent le système (F',H') dans l'état ξ à l'instant -1 et l'état ζ à l'instant 0. En remarquant de plus que Λ est un opérateur de Toeplitz, il vient en utilisant le lemme (4.2)

$$V'\Lambda V - U'\Lambda U = \zeta' P^{*}\zeta - \xi' P^{*}\xi + (\xi'\ v'(-1)) \begin{bmatrix} Q^{*}S^{*} \\ S'^{*}R^{*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ v(-1) \end{bmatrix} \quad .(4.42)$$

Il s'ensuit que

$$(\xi' v'(-1)) \begin{bmatrix} Q^{*}S^{*} \\ S'^{*}R^{*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ v(-1) \end{bmatrix} = (V'\Lambda V - \zeta' P^{*}\zeta) - (U'\Lambda U - \xi' P^{*}\xi) \quad . (4.43)$$

Par suite de la définition de P^{*}, il est clair que

i) $V'\Lambda V - \zeta' P^{*}\zeta \geq 0$

ii) $U'\Lambda U - \xi' P^{*}\xi$ (≥ 0) peut être rendu arbitrairement petit par un choix convenable de U.

Donc $$(\xi' v'(-1)) \begin{bmatrix} Q^{*}S^{*} \\ S'^{*}R^{*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ v(-1) \end{bmatrix} \geq 0 \quad .$$

Les vecteurs ξ et $v(-1)$ étant arbitraires

$$\begin{bmatrix} Q^{*}S^{*} \\ S'^{*}R^{*} \end{bmatrix} \geq 0 \quad .$$

3ème PARTIE

DUALITE ET COMPLEMENTS

4.5 - Dualité dans le cas continu

A l'opérateur Λ défini à partir de $\Lambda(\tau)$ donné par (4.4), on peut faire correspondre l'opérateur $\tilde{\Lambda}$ que nous définirons comme étant l'opérateur dual par

$$\tilde{\Lambda}(\tau) = \Lambda(-\tau) = G'e^{F'\tau} H'\varepsilon(\tau) + He^{-F\tau} G\varepsilon(-\tau) + R\delta(\tau) \quad . \tag{4.44}$$

Il est facile de voir que $\tilde{\Lambda}$ est de type réel positif {non négatif} en même temps que Λ, en remarquant que

$$\iint u'(\alpha)\Lambda(\beta-\alpha)u(\beta)d\alpha\, d\beta = \iint u'(-\alpha)\Lambda(\alpha-\beta)u(-\beta)d\alpha\, d\beta$$

$$= \iint v'(\alpha)\Lambda(\alpha-\beta)v(\beta)d\alpha\, d\beta = \iint v'(\alpha)\tilde{\Lambda}(\beta-\alpha)v(\beta)d\alpha\, d\beta \tag{4.45}$$

avec $v(\alpha) = u(-\alpha)$.

Si l'on appelle problème continu {H,F,G,R} le problème consistant à chercher les réalisations markoviennes de $\Lambda(\tau)$ ou de façon équivalente (voir théorème (3.1)) la matrice P et les matrices associées Q et S telles que

$$FP + PF' = -Q \tag{4.46}$$

$$G - PH' = S \tag{4.47}$$

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \geq 0 \quad , \quad P \geq 0 \tag{4.48}$$

le problème correspondant à $\tilde{\Lambda}(\tau)$ sera dit le problème dual associé, qui est par conséquent le problème continu $\{G',F',H',R\}$ qui consiste à chercher $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ et $\tilde{S}$ tels que

$$F'\tilde{P} + \tilde{P}F = -\tilde{Q} \tag{4.49}$$

$$H' - \tilde{P}G = \tilde{S} \tag{4.50}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{Q} & \tilde{S} \\ \tilde{S}' & R \end{bmatrix} \geq 0 \quad , \quad \tilde{P} \geq 0 \quad . \tag{4.51}$$

On a alors le résultat.

THEOREME (4.3) (dualité dans le cas continu)

Si P matrice positive définie est solution du problème continu $\{H,F,G,R\}$, alors P^{-1} est solution du problème continu dual $\{G',F',H',R\}$ et réciproquement.

Supposons donc que $P>0$ vérifie (4.46)-(4.48): on en déduit aisément

$$F'P^{-1} + P^{-1}F = -P^{-1}QP^{-1} = -\tilde{Q} \tag{4.52}$$

$$H' - P^{-1}G = -P^{-1}S = \tilde{S} \tag{4.53}$$

et l'on a bien

- d'une part $P^{-1} > 0$ car $P>0$;
- d'autre part

$$\begin{bmatrix} \tilde{Q} & \tilde{S} \\ \tilde{S}' & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \geq 0 \tag{4.54}$$

car $\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \geq 0$.

Il s'ensuit que P^{-1} vérifie bien toutes les relations (4.49) à (4.51) du problème dual $\{G',F',H',R\}$.

4.6 - Problèmes continus et discrets associés

De même qu'on a défini au paragraphe (4.5) le problème continu {H,F,G,R} comme consistant à chercher P vérifiant (4.46) à (4.48), on définit le problème discret $\{H,F,G,\Lambda_0\}$ comme consistant à chercher la matrice P et les matrices Q, S et R associées telles que (voir théorème (3.4))

$$P - FPF' = Q \tag{4.55}$$

$$G - FPH' = S \tag{4.56}$$

$$\Lambda_0 - HPH' = R \tag{4.57}$$

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \geq 0 \quad , \; P \geq 0 \; . \tag{4.58}$$

Nous allons chercher à associer au problème discret $\{H,F,G,\Lambda_0\}$ un problème continu $\{H_c,F_c,G_c,R_c\}$ tel que toute solution P de l'un soit solution de l'autre.

Nous remarquons d'abord que les relations (4.55) à (4.58) du lemme positif réel discret sont équivalentes à (voir théorème (3.5))

$$S(z) = \Lambda_0 + H(zI-F)^{-1} G + G'(z^{-1}I-F')H'$$

$$= \left[H(zI-F)^{-1},I\right] \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (z^{-1}I-F')^{-1}H' \\ I \end{bmatrix} \tag{4.59}$$

et

$$P - FPF' = Q \; . \tag{4.60}$$

Une méthode usuelle pour transformer un problème discret en problème continu consiste à utiliser la transformation conforme (HITZ)

$$s = \frac{z-1}{z+1} \qquad z = \frac{1+s}{1-s} \tag{4.61}$$

qui conserve la stabilité des opérateurs (transformation de l'intérieur du cercle unité dans le demi plan gauche).

Avec ce changement de variable, la fonction parahermitienne discrète S(z) devient la fonction parahermitienne continue $S_c(s)$:

$$S_c(s) = S\left(\frac{1+s}{1-s}\right) \quad . \tag{4.62}$$

Si l'on note (calcul long mais simple) que

$$\left(\frac{1+s}{1-s}I-F\right)^{-1} = 2(I+F)^{-1}\left[sI-(F+I)^{-1}(F-I)\right]^{-1}(I+F)^{-1} - (I+F)^{-1} \tag{4.63}$$

l'identité (4.59) peut s'écrire

$$S_c(s) = R_c + H_c(sI-F_c)^{-1}G_c + G_c'(-sI-F_c')^{-1}H_c'$$

$$= \left[H_c(sI-F_c)^{-1}, I\right]\begin{bmatrix} Q_c & S_c \\ S_c' & R_c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-sI-F_c')^{-1}H_c' \\ I \end{bmatrix} \tag{4.64}$$

avec

$$F_c = (F+I)^{-1}(F-I) \tag{4.65}$$

$$H_c = \sqrt{2}\,H(F+I)^{-1} \tag{4.66}$$

$$G_c = \sqrt{2}\,(F+I)^{-1}G \tag{4.67}$$

$$R_c = \Lambda_0 - H(F+I)^{-1}G - G'(F'+I)^{-1}H' \tag{4.68}$$

et

$$\begin{bmatrix} Q_c & S_c \\ S_c' & R_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\,(F+I)^{-1}, 0 \\ -H(F+I)^{-1}G, I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2}(F'+I)^{-1}, & -G'(F'+I)^{-1}H' \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{4.69}$$

soit

$$Q_c = 2(F+I)^{-1}Q(F'+I)^{-1} \tag{4.70}$$

$$S_c = \sqrt{2}\,(F+I)^{-1}S - \sqrt{2}\,(F+I)^{-1}QG'(F'+I)^{-1}H' \quad . \tag{4.71}$$

Il est d'abord clair par (4.69) que les conditions

$$\begin{bmatrix} Q_c & S_c \\ S_c' & R_c \end{bmatrix} \geq 0 \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \geq 0$$

sont équivalentes.

De plus la matrice P_c correspondante est donnée par l'équation

$$F_c P_c + P_c F_c' = - Q_c \tag{4.72}$$

soit $$(F+I)^{-1}(F-I)P_c + P_c(F'-I)(F'+I)^{-1} = - 2(F+I)^{-1} Q(F'+I)^{-1}$$

$$(F-I)P_c(F'+I) + (F+I)P_c(F'-I) = - 2Q$$

$$P_c - FP_c F' = Q \quad . \tag{4.73}$$

Cette équation n'est autre que l'équation (4.55) qui a une solution unique (F asymptotiquement stable). Par suite

$$P_c = P \quad . \tag{4.74}$$

Les relations (4.64) et (4.72) étant équivalentes au lemme positif réel continu (voir théorème (3.3)) , on voit qu'on a ainsi associé au problème discret initial $\{H,F,G,\Lambda_0\}$ un problème continu $\{H_c,F_c,G_c,R_c\}$ par les relations (4.65)-(4.68) tel que toute solution P de l'un soit solution de l'autre.

Inversement il est possible d'associer à un problème continu $\{H_c,F_c,G_c,R_c\}$ un problème discret équivalent par les relations suivantes (inverses des relations (4.65) à (4.68))

$$F = (I-F_c)^{-1}(I+F_c) \tag{4.75}$$

$$H = \sqrt{2}\, H_c(I-F_c)^{-1} \tag{4.76}$$

$$G = \sqrt{2}\,(I-F_c)^{-1} G_c \tag{4.77}$$

$$\Lambda_0 = R_c + H_c(I-F_c)^{-1} G_c + G_c'(I-F_c')^{-1} H_c' \quad . \tag{4.78}$$

Le théorème suivant résume ces résultats.

THEOREME (4.4) (problèmes continu et discret associés)

A tout problème discret $\{H,F,G,\Lambda_0\}$, on peut associer un problème continu $\{H_c,F_c,G_c,R_c\}$ et inversement en utilisant les formules (4.65) à (4.68) ou (4.75) à (4.78) tel que toute solution P de l'un soit solution de l'autre.

4.7 - Dualité dans le cas discret

Pour le problème discret $\{H,F,G,\Lambda_0\}$ associé à $\Lambda(k)$, on définit comme dans le cas continu le problème dual $\{G',F',H',\Lambda_0\}$ qui est associé à l'opérateur $\tilde{\Lambda}(k)$

où

$$\tilde{\Lambda}(k) = \Lambda(-k) \quad . \tag{4.79}$$

De même que dans le cas continu, il est facile de voir que Λ et $\tilde{\Lambda}$ sont simultanément de type réel positif ou réel non négatif.

A présent, en considérant les relations (4.65) à (4.68) il est facile de voir que les problèmes continus associés à ces deux problèmes discrets sont $\{H_c,F_c,G_c,R_c\}$ et $\{G'_c,F'_c,H'_c,R_c\}$ qui sont par conséquent duaux.

Appliquant le théorème (4.3), il vient le résultat suivant.

THEOREME (4.5) (dualité dans le cas discret)

Si P matrice positive définie est solution du problème discret $\{H,F,G,\Lambda_0\}$, alors P^{-1} est solution du problème discret dual $\{G',F',H',\Lambda_0\}$ et réciproquement.

4.8 - Opérateurs de covariance coercifs

Jusqu'ici nous n'avons considéré que des fonctions $\Lambda(\tau)$ de type réel non négatif, qui correspondent au lemme positif réel avec la condition $P \geq 0$.

Nous pouvons définir pour Λ la notion de coercivité.

DEFINITION (4.2)

La fonction matricielle parasymétrique $\Lambda(\tau)$ est coercive si quelle que soit la fonction $u(\alpha)$ de carré sommable, on a

$$\iint u'(\alpha)\ \Lambda(\beta-\alpha)\ u(\beta)\ d\alpha\ d\beta \geq \rho \int u'(\alpha)\ u(\alpha)\ d\alpha \tag{4.80}$$

où ρ est une constante positive.

On peut alors démontrer le résultat suivant.

THEOREME (4.6) (cas coercif)

Si Λ est de type coercif, alors toute matrice P non négative définie vérifiant les relations du lemme positif réel est nécessairement définie positive.

En effet reprenons la définition de P^*:

$$x'P^*x = \inf_{U \in \mathcal{C}(x)} U'\Lambda U \ . \tag{4.81}$$

Or on sait par la théorie de la commandabilité que pour tout $U \in \mathcal{C}(x)$

$$||U||^2 \geq x' \, C^{-1} \, x \tag{4.82}$$

où C est la matrice de commandabilité (voir {KALMAN 10}).
Et par la coercivité de Λ, il est clair que

$$U'\Lambda U > \rho \, ||U||^2 \ . \tag{4.83}$$

Par suite

$$P^* \geq \rho \, C^{-1} > 0 \ . \tag{4.84}$$

Si l'on fait le même raisonnement pour le problème dual ($\tilde{\Lambda}$ est coercif en même temps que Λ), on obtient aussi

$$\tilde{P}^* > 0 \text{ et par suite } (\tilde{P}^*)^{-1} > 0 \ .$$

Mais il est démontré au chapitre 5 que tout P vérifiant les relations du lemme positif réel est tel que (théorème (5.1))

$$(\tilde{P}^*)^{-1} \leq P \leq P^*$$

ce qui achève la démonstration.

4.9 - Commentaires et bibliographie

La démonstration du lemme positif réel présentée dans ce chapitre est originale. Elle généralise la démonstration donnée dans {FAURRE 2, 3} pour un cas plus particulier, où l'on utilisait aussi une matrice P^* définie par un infimum.

Les premières démonstrations du lemme positif réel utilisèrent toutes des résultats supposés connus d'existence de factorisation spectrale. Les références correspondantes sont {KALMAN 6}, POPOV, {YAKUBOVICH 1}. Le problème sous jacent à ces travaux était l'étude de l'hyperstabilité de systèmes linéaires à feedback non linéaire et non pas la réalisation markovienne.

Il convient aussi de signaler dans {ANDERSON 2,3} des démonstrations fondées sur les méthodes de factorisation.

Dans {FAURRE 1}, on trouve pour le cas scalaire une démonstration différente fondée sur la convexité de l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions P et des résultats supposés connus du problème mathématique des moments.

L'intérêt de l'approche et de la démonstration que nous avons introduites dans ce chapitre est double: d'une part cette approche nous conduira au chapitre 5 à une analyse assez fine de la structure de l'ensemble des solutions du problème de la réalisation markovienne, d'autre part nous montrerons au chapitre 6 comment cette démonstration conduit à des algorithmes effectifs plus simples que ceux de factorisation spectrale.

CHAPITRE 5

STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES REALISATIONS

5.1 - Max et min de l'ensemble $\mathcal{P}$

1°) Cas continu

Rappelons que l'ensemble des réalisations markoviennes du processus gaussien centré $y(t)$ de covariance $\Lambda(\tau)$ donnée par (4.4)-(4.7) est caractérisé par

$$FP + PF' = -Q \tag{5.1}$$

$$G - PH' = S \tag{5.2}$$

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \geq 0 \quad , \quad P>0 \tag{5.3}$$

où R, F, G, H sont donnés et P, Q, S à déterminer.

Nous désignerons par $\mathcal{P}$ l'ensemble des matrices P vérifiant ces relations.

THEOREME (5.1) (cas continu et discret)

L'ensemble $\mathcal{P}$ est un ensemble convexe fermé borné admettant un max P^* et un min P_* (autrement dit pour tout $P \in \mathcal{P}$, on a $P_* \leq P \leq P^*$).

Reprenons la définition de P^* (4.15) et utilisons le lemme (4.1) pour P quelconque appartenant à $\mathcal{P}$.

$$x'P^*x = \inf_{U \in \mathcal{C}(x)} \{x'Px + \int_{-\infty}^{0} (x'Qx+u'Ru+2x'Su)d\tau\} \quad . \tag{5.4}$$

Compte tenu de la condition (5.3), on voit que

$$P \leq P^* \quad .$$

Si l'on considère à présent le problème dual et si l'on définit

$$P_* = (\tilde{P}^*)^{-1} \tag{5.5}$$

$\tilde{P}^*$ étant le max de $\tilde{\mathcal{P}}$ du problème dual, en utilisant le théorème (4.3), on obtient

$$P^{-1} \leq (P_*)^{-1}$$

soit

$$P \geq P_* \quad .$$

Enfin la convexité et le caractère fermé de $\mathcal{P}$ sont immédiats.

Remarquons que l'existence d'un max et d'un min pour l'ensemble convexe $\mathcal{P}$ n'est pas triviale, l'ensemble des matrices symétriques ne formant pas un treillis pour la relation d'ordre considérée.

2°) Cas discret

L'ensemble des réalisations markoviennes du processus gaussien centré y(k) de covariance $\Lambda(k)$ donnée par (4.24)-(4.27) est caractérisé par

$$P - FPF' = Q \tag{5.6}$$

$$G - FPH' = S \tag{5.7}$$

$$\Lambda_0 - HPH' = R \tag{5.8}$$

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \geq 0 \quad , P>0 \tag{5.9}$$

où Λ_0, F, G, H sont donnés et P, Q, R, S à déterminer.

Nous désignerons encore par $\mathcal{P}$ l'ensemble des matrices P vérifiant ces relations.

Le théorème (5.1) est vérifié dans le cas discret, la démonstration étant identique et s'appuyant sur la définition (4.36) de P^*, le lemme (4.2) et le problème dual. De plus, de la relation (5.8) on déduit aisément le corollaire suivant.

COROLLAIRE (5.1) (cas discret)

Pour toute réalisation, on a

$$R^{*} \leq R \leq R_{*} \quad . \tag{5.10}$$

5.2 - Structure de l'ensemble $\mathcal{P}$ (cas continu et régulier)

Nous allons analyser la structure de l'ensemble convexe des réalisations $\mathcal{P}$ dans le cas continu et régulier (R>0).

Pour cela, nous allons énoncer une forme particulière du lemme positif réel.

THEORÈME (5.2) (lemme positif réel, cas continu et régulier)

Dans le cas continu et régulier (R>0), l'ensemble $\mathcal{P}$ est caractérisé par l'inégalité

$$FP + PF' \leq -(G-PH')R^{-1}(G'-HP) \tag{5.11}$$

l'égalité étant obtenue quand $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} Q & S \\ S'R \end{pmatrix} = m.$

En effet compte tenu de l'hypothèse de régularité (R>0) la condition (5.3)

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \geq 0$$

équivaut à

$$Q - SR^{-1}S' \geq 0 \tag{5.12}$$

qui n'est autre que (5.11) et l'égalité équivaut clairement à $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} Q & S \\ S'R \end{pmatrix} = m.$

De plus F étant asymptotiquement stable (hypothèse (4.7)), (5.11) entraîne la non négativité de P.

On pose à présent

$$\Delta P = P - P_{*} \tag{5.13}$$

et

$$F_{*} = F - (G-P_{*}H')R^{-1}H \quad . \tag{5.14}$$

On verra au chapitre suivant (6.45) que P_* vérifie l'égalité (et non l'inégalité) (5.11) comme toutes les solutions telles que $\text{rang}\begin{pmatrix} QS \\ S'R \end{pmatrix} = m$:

$$FP_* + P_*F' = -(G-P_*H')R^{-1}(G'-HP_*) \quad . \tag{5.15}$$

Alors de (5.11) et (5.15), on déduit

$$F_*\Delta P + \Delta P\, F_*' \leq - \Delta P.H'R^{-1}H.\,\Delta P. \tag{5.16}$$

L'inégalité (5.16) caractérise elle aussi l'ensemble $\mathcal{P}$.
Il est clair que $\Delta P \geq 0$ pour $P \in \mathcal{P}$ (car P_* est minimum). Pour ΔP inversible ($\Delta P > 0$), (5.16) s'écrit

$$(\Delta P)^{-1} F_* + F_*'(\Delta P)^{-1} \leq - H'R^{-1} H. \,, \tag{5.17}$$

Cela permet d'énoncer le résultat suivant.

THEOREME (5.3) (description paramétrique de $\mathcal{P}$, cas continu et régulier)
Dans le cas continu et régulier, l'ensemble $\mathcal{P}$ a la représentation paramétrique

$$P = P_* + M^{-1} \quad , \tag{5.18}$$

M étant solution de l'équation linéaire

$$F_*'M + MF_* = - H'R^{-1} H - A \tag{5.19}$$

le paramètre A décrivant le cône des matrices non négatives définies, à l'exception au plus d'un ensemble de mesure nulle pour lequel $P-P_*(\geq 0)$ n'est pas inversible.

La figure 5-1 tente de représenter géométriquement ce résultat: $\mathcal{P}$ est l'inverse d'un cône convexe.

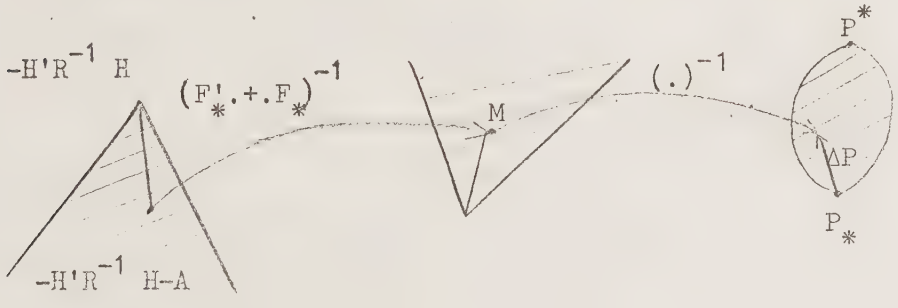


Figure 5-1 Structure de $\mathcal{P}$

P^* étant le maximum de $\mathcal{P}$, on déduit du théorème précédent le corollaire suivant.

COROLLAIRE (5.2)

Les extrema de $\mathcal{P}$ sont reliés par la relation

$$F_*'(P^*-P_*)^{-1} + (P^*-P_*)^{-1} F_* = - H'R^{-1} H \qquad (5.20)$$

Si l'on interprète cette relation comme une équation de Lyapunov, et si l'on remarque que $(P^*-P_*)^{-1}$ est définie-positive, et que (H, F_*) est complètement observable, on voit que F_* est asymptotiquement stable.

De même si l'on pose

$$F^* = F -(G-P^*H')R^{-1} H \qquad (5.21)$$

on peut démontrer que $(-F^*)$ est asymptotiquement stable.

COROLLAIRE (5.3)

Les matrices F^* et $(-F^*)$ sont asymptotiquement stables.

Par dualité en posant

$$\tilde{F}^* = F - (H'-P^{*-1}G)R^{-1} G' \quad \text{et} \quad \tilde{F}_* = F - (H'-P_*^{-1}G) R^{-1}G' \qquad (5.22)$$

on obtient le corollaire (5.4).

COROLLAIRE (5.4)

Les extrema de $\mathcal{P}$ sont reliés par la relation

$$\tilde{F}^*(P_*^{-1}-P^{*-1})^{-1} + (P_*^{-1}- P^{*-1})^{-1} \tilde{F}'^* = - G R^{-1} G'. \qquad (5.23)$$

et les matrices $\tilde{F}^*$ et $(-\tilde{F}_*)$ sont asymptotiquement stables.

5.3 - Commentaires et bibliographie

La forme particulière du lemme positif réel du théorème (5.2) est due à {ANDERSON 6} .

Les relations particulières (5.20) et (5.22) liant P^*, P_*, F^* et F_* semblent être introduites ici pour la première fois.

Nous n'avons pas analysé la structure de $\mathcal{P}$ dans le cas discret ; deux approches peuvent y conduire : mener une analyse directe avec l'équation de Lyapunov discrète, ou utiliser la transformation du chapitre 4, paragraphe 4.6. Les résultats sur la stabilité de F_* et $(-F^*)$ subsistent.

CHAPITRE 6

ALGORITHMES DE CALCUL DES REALISATIONS EXTREMALES

1ère PARTIE

CAS DISCRET

6.1 - Algorithmes donnant P^* et P_*

Nous allons calculer la matrice P^* définie en (4.36), en la redéfinissant comme la limite suivante:

$$P^* = \lim_{n\to\infty} P_n \tag{6.1}$$

où P_n est défini par

$$x'P_n\,x = \inf_{U \in \mathcal{E}_n(x)} U'\Lambda U \tag{6.2}$$

où $\mathcal{E}_n(x)$ est l'intersection de $\mathcal{E}(x)$ (4.37) et des suites de longueurs n au plus:

$$\mathcal{E}_n(x) = \{u(.) \,|\, x = \mathcal{O}_n\, U\} \tag{6.3}$$

$\mathcal{O}_n$ étant la matrice d'observabilité d'ordre n:

$$\mathcal{O}_n = \left[H', F'H', .., F'^{n-1} H'\right] . \tag{6.4}$$

Nous désignerons aussi par Λ_n la matrice de covariance limitée à l'ordre n (n×n blocs).

La matrice P_n est ainsi définie par

$$x' P_n x = \inf_U U' \Lambda_n U \tag{6.5}$$

sous la contrainte linéaire

$$x = \mathcal{O}_n U \ . \tag{6.6}$$

Λ_n étant positif défini pour tout n (hypothèse), le minimum de (6.5) est atteint pour

$$U = \Lambda_n^{-1} \mathcal{O}_n' \left[\mathcal{O}_n \Lambda_n^{-1} \mathcal{O}_n'\right]^{-1} x \tag{6.7}$$

et par conséquent

$$P_n = \left[\mathcal{O}_n \Lambda_n^{-1} \mathcal{O}_n'\right]^{-1} \ . \tag{6.8}$$

Cette forme explicite de P_n constitue déja un algorithme, peu utilisable cependant car il nécessite l'inversion d'une matrice de dimension croissante avec n. Nous allons chercher une forme récurrente équivalente.

Si l'on note que

$$\Lambda_{n+1} = \begin{bmatrix} \Lambda_0 & L_n \\ L_n' & \Lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad L_n = G' \mathcal{O}_n$$

et que, par conséquent

$$\Lambda_{n+1}^{-1} = \begin{bmatrix} E_n & - E_n L_n \Lambda_n^{-1} \\ - \Lambda_n^{-1} L_n' E_n & \Lambda_n^{-1} + \Lambda_n^{-1} L_n' E_n L_n \Lambda_n^{-1} \end{bmatrix}$$

avec

$$E_n = (\Lambda_0 - L_n \Lambda_n^{-1} L_n')^{-1} = (\Lambda_0 - G' P_n^{-1} G)^{-1}$$

on en déduit

$$P_{n+1}^{-1} = (H', F' \mathcal{O}_n)\, \Lambda_{n+1}^{-1} \begin{bmatrix} H \\ \mathcal{O}_n' F \end{bmatrix}$$

$$= F' P_n^{-1} F + (H' - F' P_n^{-1} G)(\Lambda_0 - G' P_n^{-1} G)^{-1} (H - G' P_n^{-1} F) \qquad (6.9)$$

d'où l'algorithme suivant.

ALGORITHME (6.1) (cas discret)

Le maximum P^* des réalisations de $\Lambda(k)$ de type réel positif s'obtient en générant la suite récurrente

$$\Sigma_0 = 0 \qquad (6.10)$$

$$\Sigma_{n+1} = F' \Sigma_n F + (H' - F' \Sigma_n G)(\Lambda_0 - G' \Sigma_n G)^{-1} (H - G' \Sigma_n F) \qquad (6.11)$$

jusqu'à convergence vers la valeur d'équilibre Σ_∞, alors

$$P^* = \Sigma_\infty^{-1} \qquad (6.12)$$

$$Q^* = P^* - F P^* F' \qquad (6.13)$$

$$S^* = G - F P^* H' \qquad (6.14)$$

$$R^* = \Lambda_0 - H P^* H' \quad . \qquad (6.15)$$

Si l'on considère l'algorithme équivalent du problème dual, on obtient l'algorithme dual suivant qui génère la réalisation minimale.

ALGORITHME (6.2) (cas discret)

Le minimum P_* des réalisations de $\Lambda(k)$ de type réel positif s'obtient en générant la suite récurrente

$$\Omega_0 = 0 \qquad (6.16)$$

$$\Omega_{n+1} = F \Omega_n F' + (G - F \Omega_n H')(\Lambda_0 - H \Omega_n H')^{-1} (G' - H \Omega_n F') \qquad (6.17)$$

jusqu'à convergence vers la valeur d'équilibre Ω_∞, alors

$$P_* = \Omega_\infty \tag{6.18}$$

$$Q_* = P_* - FP_*F' \tag{6.19}$$

$$S_* = G - FP_*H' \tag{6.20}$$

$$R_* = \Lambda_0 - HP_*H' \quad . \tag{6.21}$$

Il ressort des algorithmes précédents des relations vérifiées par P^* et P_*.

COROLLAIRE (6.1)

Les extrema P^* et P_* vérifient les relations

$$P^{*-1} = F'P^{*-1}F + (H'-F'P^{*-1}G)(\Lambda_0-G'P^{*-1}G)^{-1}(H-G'P^{*-1}F) \tag{6.22}$$

$$P_* = FP_*F' + (G-FP_*H')(\Lambda_0-HP_*H')^{-1}(G'-HP_*F') \quad . \tag{6.23}$$

2ème PARTIE

CAS CONTINU

6.2 - Forme infinitésimale de l'algorithme dans le cas continu

Nous allons calculer P^* défini en (4.15) comme la limite suivante

$$P^* = \lim_{t\to\infty} P_t \tag{6.24}$$

où P_t est défini par

$$x'P_t\, x = \inf_{U \in \mathcal{E}_t(x)} U'\Lambda U \tag{6.25}$$

où $\mathcal{E}_t(x)$ est l'intersection de $\mathcal{E}(x)$ (4.17) et des commandes de longueur t au plus.

$U \in \mathcal{E}_t(x_-)$ étant donné, considérons $V \in \mathcal{E}_{t+\Delta t}(x)$ avec

$$V: \quad v(\alpha) = \begin{cases} u(\alpha+\Delta t) & \text{pour} \quad -t-\Delta t<\alpha<-\Delta t \\ u_0 & \text{pour} \quad -\Delta t<\alpha< 0 \end{cases} \tag{6.26}$$

avec bien entendu

$$x = (I+F'\Delta t)x_- + H'\,\Delta t\, u_0 + 0(\Delta t^2). \tag{6.27}$$

Alors il vient

$$V'\Lambda V = U'\Lambda U + \Delta t\, u_0' G'(2I+F'\,\Delta t)x_- + u_0'(R\Delta t+HG\Delta t^2)u_0 + 0(\Delta t^3) \quad (*) \tag{6.28}$$

D'après la définition de $P_{t+\Delta t}$, on obtient

(*) Ce développement est valable quel que soit $R \geq 0$ en supposant $HG > 0$, hypothèse faite dans la suite quand $R \not> 0$. Sinon il faudrait développer davantage le terme quadratique en u_0.

$$x' P_{t+\Delta t}\, x = \inf_{U, u_0} V' \Lambda V$$

$$= \inf_{u_0} \{ x_-' P_t x_- + \Delta t\, u_0' G' (2\, I + F' \Delta t) x_- + u_0' (R \Delta t + HG \Delta t^2) u_0 \} \qquad (6.29)$$

sous la contrainte

$$x = (I + F' \Delta t, H' \Delta t) \begin{bmatrix} x_- \\ u_0 \end{bmatrix} . \qquad (6.30)$$

Avec quelques calculs, on obtient ainsi une forme explicite faisant passer de P_t à $P_{t+\Delta t}$:

$$P_{t+\Delta t}^{-1} =$$

$$(I+F'\Delta t, H'\Delta t) \begin{bmatrix} P_t^{-1} + P_t^{-1} (I + F\frac{\Delta t}{2}) GEG' (I + F'\frac{\Delta t}{2})\, P_t^{-1} \Delta t^2, & - P_t^{-1} (I + F\frac{\Delta t}{2}) GE \Delta t \\ - EG' (I + F'\frac{\Delta t}{2}) P_t^{-1}\, \Delta t \quad , & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I + F\Delta t \\ H \quad \Delta t \end{bmatrix} \qquad (6.31)$$

avec

$$E\, \Delta t = \left[R + \Delta t (HG - G' P_t^{-1} G) - G' (F' P_t^{-1} + P_t^{-1} F) G \frac{\Delta t^2}{2} + 0(\Delta t^3) \right]^{-1} . \qquad (6.32)$$

Nous allons exploiter cette forme infinitésimale dans le seul cas où $R > 0$, dit cas régulier.

6.3 - Algorithme continu pour le cas régulier ($R>0$)

Dans le cas régulier ($R>0$), l'algorithme (6.31)-(6.32) prend la forme

$$\frac{P_{t+\Delta t}^{-1} - P_t^{-1}}{\Delta t} = F' P_t^{-1} + P_t^{-1} F + (H' - P_t^{-1} G) E\, \Delta t (H - G' P_t^{-1}) + 0(\Delta t) . \qquad (6.33)$$

Mais, compte-tenu de l'hypothèse $R>0$, on a clairement

$$\lim_{\Delta t \to 0} E\, \Delta t = R^{-1} \qquad (6.34)$$

et par conséquent l'algorithme suivant.

ALGORITHME (6.3) (cas continu et régulier)

Le maximum P^* des réalisations de $\Lambda(\tau)$ de type réel positif s'obtient dans le cas régulier ($R>0$) en intégrant

$$\Sigma(0) = 0 \tag{6.35}$$

$$\dot{\Sigma} = F'\Sigma + \Sigma F + (H'-\Sigma G)R^{-1}(H-G'\Sigma) \tag{6.36}$$

jusqu'à convergence vers la valeur d'équilibre Σ_∞, alors

$$P^* = \Sigma_\infty^{-1} \tag{6.37}$$

$$Q^* = - FP^* - P^*F' \tag{6.38}$$

$$S^* = G - P^*H' \quad . \tag{6.39}$$

Si l'on considère l'algorithme équivalent du problème dual, on obtient la réalisation minimale par l'algorithme suivant.

ALGORITHME (6.4) (cas continu et régulier)

Le minimum P_* des réalisations de $\Lambda(\tau)$ de type réel positif s'obtient dans le cas régulier ($R>0$) en intégrant

$$\Omega(0) = 0 \tag{6.40}$$

$$\dot{\Omega} = F\Omega + \Omega F' + (G-\Omega H')R^{-1}(G'-H\Omega) \tag{6.41}$$

jusqu'à convergence vers la valeur d'équilibre Ω_∞, alors

$$P_* = \Omega_\infty \tag{6.42}$$

$$Q_* = - FP_* - P_*F' \tag{6.43}$$

$$S_* = G - P_*H' \quad . \tag{6.44}$$

On peut remarquer que les deux extrema P^* et P_* vérifient la relation

$$FP + PF' = -(G - PH')R^{-1}(G' - HP) \tag{6.45}$$

ou la relation équivalente

$$F'P^{-1} + P^{-1}F = -(H' - P^{-1}G)R^{-1}(H - G'P^{-1}) \tag{6.46}$$

qui caractérisent les réalisations $P \in \mathcal{P}$ telles que

$$\text{rang} \begin{pmatrix} Q & S \\ S' & R \end{pmatrix} = m \tag{6.47}$$

(voir Théorème (5.2)).

6.4 - Commentaires et bibliographie

Les algorithmes présentés dans ce chapitre ont été évalués et testés numériquement dans le cas discret. Voir à ce sujet MARMORAT pour le cas $R = 0$ et GAUTHIER pour le cas général. De plus, à notre connaissance, les algorithmes publiés initialement dans {FAURRE 2, 3} ont été utilisés par d'autres avec succès. Les algorithmes continus sont en cours d'évaluation (voir GERMAIN).

Les méthodes initiales et plus anciennes pour trouver une réalisation markovienne sont dérivées des idées de factorisation spectrale. Les algorithmes numériques correspondants ont été présentés dans DAVIS, MATYASH, YOULA. Alors que pour le cas d'un processus monodimensionnel, les deux types d'approche semblent numériquement comparables, dans le cas à plusieurs dimensions les algorithmes que nous proposons semblent l'emporter nettement sur la complexité des factorisations de matrices polynomiales.

Signalons cependant que TUEL a réussi à mettre ce type d'algorithme de factorisation sous une forme récursive qui est numériquement bien plus satisfaisante, et se rapproche sensiblement des algorithmes que nous présentons ici.

CHAPITRE 7

FACTORISATION FORTE, REALISATION EXTREMALE ET FILTRE

7.1 - Filtre (cas discret)

Rappelons qu'un filtre statistique optimal est un algorithme ou un système générant à l'instant i la meilleure estimée d'un signal z(i) à partir d'observations passées y(i-1), y(i-2),... . Lorsque l'on a donné une représentation markovienne aux signaux, on pose ainsi le problème de calculer

$$\hat{x}(i) = E\{x(i) \mid y(i-1), y(i-2), \ldots\} \tag{7.1}$$

pour un modèle markovien stationnaire de la forme

$$x(i+1) = Fx(i) + v(i) \tag{7.2}$$

$$y(i) = Hx(i) + w(i) \tag{7.3}$$

avec

$$E\left\{\begin{bmatrix} v(i) \\ w(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'(j) & w'(j) \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \delta_{ij} \quad . \tag{7.4}$$

Rappelons que l'algorithme de filtrage optimal (filtre de Kalman) est sous les hypothèses faites aux chapitres précédents sur le processus y

$$\hat{x}(i+1) = F\hat{x}(i) + TW(i) \tag{7.5}$$

$$y(i) = H\hat{x}(i) + W(i) \tag{7.6}$$

où le gain optimal T est donné par

$$T = (F\Sigma H'+S)(H\Sigma H'+R)^{-1} , \tag{7.7}$$

Σ étant l'unique solution positive définie de l'équation de Riccati stationnaire suivante

$$\Sigma = F\Sigma F' - (F\Sigma H'+S)(H\Sigma H'+R)^{-1}(H\Sigma F'+S') + Q \quad . \tag{7.8}$$

Voir les références {KALMAN 1,2,4}, {FAURRE 5} à ce sujet.

On voit que le filtre (7.5)-(7.6) est une réalisation markovienne particulière du processus y(i), W(i) étant un bruit blanc appelé innovation du processus y(i); d'où la définition suivante.

DEFINITION (7.1) (filtre, cas discret)

On appelle filtre toute réalisation markovienne telle que

$$x(i) = E\{x(i) \mid y(i-1), y(i-2), \ldots\} \quad . \tag{7.9}$$

On peut alors prouver le critère suivant.

THEOREME (7.1)

Une réalisation markovienne est un filtre si et seulement s'il existe une matrice T telle que

i) $$v(i) = Tw(i) \tag{7.10}$$

ou de façon équivalente

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TRT' & TR \\ RT' & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ I \end{bmatrix} R(T'I) \quad . \tag{7.11}$$

ii) la matrice F - TH est asymptotiquement stable.

En effet, F étant asymptotiquement stable, on peut écrire

$$x(i) = \sum_{j=1}^{\infty} F^{j-1} v(i-j) = v(i-1) + Fv(i-2) + \ldots \quad . \tag{7.12}$$

D'autre part, toutes les lois étant gaussiennes,

$$E\{x(i)|y(i-1),y(i-2),\ldots\} = \sum_{j=1}^{\infty} T_j\, y(i-j)$$

$$= T_1\, y(i-1) + T_2\, y(i-2) + \ldots$$

$$= T_1\, w(i-1) + T_1\, Hx(i-1) + \ldots \quad . \qquad (7.13)$$

Par suite des hypothèses d'indépendance ($\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$ = bruit blanc), il est clair que l'égalité (7.9), c'est à dire l'égalité entre les seconds membres de (7.12) et (7.13), entraîne

$$v(i-1) = T_1\, w(i-1) \quad . \qquad (7.14)$$

De plus $F - T_1H$ est alors asymptotiquement stable comme matrice dynamique du filtre (voir les résultats sur la stabilité des filtres dans {KALMAN 4}).

Inversement si $v(i) = Tw(i)$, l'équation (7.2) s'écrit à l'aide de (7.3)

$$x(i+1) = (F-TH)x(i) + Ty(i) \qquad (7.15)$$

ce qui entraîne alors l'égalité (7.9) si $F - TH$ est asymptotiquement stable.

7.2 - Filtre et réalisation minimale P_* (cas discret)

Considérons à nouveau le théorème (7.1) et les relations (3.37)-(3.40) du lemme positif réel. Nous voyons que le filtre est caractérisé par l'ensemble des relations

$$\begin{cases} P - FPF' = TRT' & (7.16) \\ G - FPH' = TR & (7.17) \\ \Lambda_0 - HPH' = R & (7.18) \\ P > 0 \qquad R > 0 & (7.19) \end{cases}$$

qui conduisent, après élimination de R, à

$$\begin{cases} P = FPF' + (G-FPH')\ {}_0 -HPH')^{-1}\ (G'-HPF') \\ P > 0. \end{cases} \tag{7.20}$$

Or cette équation n'est autre que (6.23) caractérisant les réalisations P telles que $\text{rang}\begin{pmatrix} Q & S \\ S'R & \end{pmatrix} = m$, et qui jointe à la condition F - TH asymptotiquement stable caractérise entièrement P_*.

Rappelons en effet que cette réalisation minimale vérifie (voir Algorithme (6.2) et Corollaire (5.3)) :

$$P_* = FP_*F' + (G-FP_*H')(\Lambda_0-HP_*H')^{-1}(G'-HP_*F') \tag{7.22}$$

$$S_* = G - FP_*H' \tag{7.23}$$

$$R_* = \Lambda_0 - HP_*H' \tag{7.24}$$

$$Q_* = (G-FP_*H')(\Lambda_0-HP_*H')^{-1}(G'-HP_*F') \ . \tag{7.25}$$

et $F_* = F - TH = F-S_*R_*^{-1}$ = matrice asymptotiquement stable.

Le gain optimal du filtre est donc

$$T = S_*\ R_*^{-1} \ . \tag{7.26}$$

Nous pouvons alors résumer ces résultats dans le théorème suivant.

THEOREME (7.2)

Un filtre du processus y est la réalisation markovienne minimale P_* de y, le gain du filtre étant $T = S_*\ R_*^{-1}$ et l'équation du filtre

$$x(i+1) = F_*\ x(i) + S_*\ R_*^{-1}\ y(i) \tag{7.27}$$

avec

$$F_* = F - S_*\ R_*^{-1}\ H \ . \tag{7.28}$$

7.3 - Filtre et factorisation forte (cas discret)

Nous venons de voir que la réalisation minimale P_* est un filtre. Voyons à présent quelle est la factorisation spectrale correspondante.

Si l'on se reporte au paragraphe 3.5, on voit que le spectre S(z) du processus y considéré s'écrit

$$S(z) = \left[H(zI-F)^{-1},I\right] \begin{bmatrix} TR_*T' & TR_* \\ R_*T' & R_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (z^{-1}I-F')^{-1}H' \\ I \end{bmatrix}$$

$$= (I + H(zI-F)^{-1} T)R_* (I + T'(z^{-1}I-F')^{-1} H') \qquad (7.29)$$

ce qui correspond à une factorisation du spectre avec le facteur carré

$$H_*(z) = (I + H(zI-F)^{-1} T)R_*^{1/2} \quad . \qquad (7.30)$$

Le lemme suivant va permettre d'analyser la position dans le plan complexe des zéros de dét $H_*(z)$.

LEMME (7.1)

Les zéros de dét $\left[I+H(zI-F)^{-1}T\right]$ sont identiques aux pôles de $(zI-F+TH)^{-1}$.

En effet, considérons l'identité

$$(zI-F+TH)^{-1} T = (zI-F)^{-1} T\left[I + H(zI-F)^{-1} T\right]^{-1} \qquad (7.31)$$

facilement démontrée en multipliant les deux membres à gauche et à droite par $(zI-F+TH)$ et $\left[I+H(zI-F)^{-1}T\right]$ respectivement.

Les pôles de $(zI-F+TH)^{-1}$ sont alors clairement les valeurs de z qui rendent infini le membre de droite de (7.31), et ce sont bien les zéros de dét $\left[I + H(zI-F)^{-1} T\right]$.

A présent, si nous remarquons que la matrice F-TH n'est rien d'autre que la matrice dynamique F_* du filtre de Kalman, nous déduisons du corollaire (5.3) que c'est une matrice asymptotiquement stable. D'autre part, les pôles de $H_*(z)$ sont clairement ceux de F. Il en découle le théorème suivant.

THEOREME (7.3)

La réalisation markovienne P_* correspond à une factorisation forte du spectre le facteur $H_*(z)$ ayant pour pôles les valeurs propres de F et dét $H_*(z)$ ayant pour zéros les valeurs propres de F-TH.

7.4 - Filtre, réalisation minimale P_* et factorisation forte dans le cas continu régulier

Bien entendu les résultats pour le cas continu sont très semblables à ceux du cas discret.

Afin d'éviter toute complication, plaçons nous dans le cas continu régulier (R>0).

Le problème du filtrage consiste à calculer

$$\hat{x}(t) = E\{x(t) | y(\alpha), \alpha \leq t\} \tag{7.32}$$

pour un modèle markovien de la forme

$$\dot{x} = Fx + v \tag{7.33}$$

$$y = Hx + w \tag{7.34}$$

avec

$$E\{\begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} [v'(\tau)\ w'(\tau)]\} = \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \delta(t-\tau) \quad . \tag{7.35}$$

Rappelons que l'algorithme de filtrage optimal s'écrit alors (voir {KALMAN 4}, {FAURRE 5})

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + TW \tag{7.36}$$

$$y = H\hat{x} + W \tag{7.37}$$

où le gain optimal T est donné par

$$T = (\Sigma H' + S)R^{-1} \ , \tag{7.38}$$

Σ étant l'unique solution positive définie de l'équation de Riccati stationnaire

$$F\Sigma + \Sigma F' - (\Sigma H' + S)R^{-1}(H\Sigma + S') + Q = 0 \quad . \tag{7.39}$$

On voit que l'algorithme (7.36)-(7.37) est une réalisation markovienne particulière car W est un bruit blanc (l'innovation), d'où la définition suivante.

DEFINITION (7.2) (filtre, cas continu)

On appelle filtre toute réalisation markovienne telle que

$$x(t) = E\{x(t) | y(\alpha), \alpha \leq t\} \quad . \tag{7.40}$$

On peut encore montrer comme pour le cas discret qu'une réalisation markovienne est un filtre si et seulement s'il existe une matrice T telle que

$$v(t) = Tw(t) \tag{7.41}$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TRT' & TR \\ RT' & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ I \end{bmatrix} R(T'I) \quad . \tag{7.42}$$

et si de plus F - TH est asymptotiquement stable.

Reprenant les relations (3.11)-(3.13) du lemme positif continu, il en découle que le filtre est caractérisé par les relations

$$\begin{cases} FP + PF' = - TRT' & (7.43) \\ G - PH' = TR & (7.44) \\ P > 0 & (7.45) \end{cases}$$

d'où, après élimination de T

$$\begin{cases} FP + PF' + (G-PH')R^{-1}(G'-HP) = 0 & (7.46) \\ P > 0 & (7.47) \end{cases}$$

qui caractérise les réalisations pour lesquelles rang $\begin{pmatrix} Q & S \\ S'R \end{pmatrix} = m$.

Celle pour laquelle, en plus, F - TH est stable, est P_* ainsi qu'il ressort du Corollaire (5.3).

THEOREME (7.4)

Un filtre du processus y est la réalisation markovienne minimale P_*, le gain du filtre étant $T=S_*R^{-1}$ et l'équation du filtre

$$\dot{x} = F_* x + S_* R^{-1} y \qquad (7.48)$$

avec

$$F_* = F - S_* R^{-1} H \quad . \qquad (7.49)$$

Si l'on se reporte au paragraphe 3.3, on voit que la réalisation minimale P_* correspond à une factorisation spectrale du spectre S(s) avec le facteur

$$H_*(s) = (I + H(sI-F)^{-1} T)R^{1/2} \quad . \qquad (7.50)$$

Avec une démonstration analogue à celle du cas discret (paragraphe 7.3), on prouve le résultat suivant.

THEOREME (7.5)

La réalisation markovienne P_* correspond à une factorisation forte du spectre.

7.5 - Commentaires et bibliographie

Le thème de ce chapitre est que factorisation forte, réalisation minimale et filtre sont équivalents.

Il est connu depuis les travaux de WIENER que factorisation forte et filtre sont équivalents. Par contre le résultat que le filtre correspond à la réalisation markovienne minimale d'un processus semble nouveau.

De même, il ne semble pas que l'on ait porté attention à l'idée assez simple que le filtre est une réalisation markovienne particulière, sauf dans les travaux de MEHRA liés à l'identification statistique où il cherche à identifier directement le filtre.

CHAPITRE 8

IMPLICATIONS PRATIQUES ET QUESTIONS OUVERTES

Nous voulons dans ce chapitre, en guise de conclusion, expliquer quelles peuvent être à notre sens les implications pratiques des algorithmes et des résultats présentés, et aussi indiquer des questions intéressantes qui restent ouvertes.

8.1 - Implications pratiques

1°) Filtrage statistique

Lorsqu'on se trouve devant un problème réel de filtrage statistique pour lequel les modèles sont inconnus ou mal connus, le premier problème qui se pose est celui de les obtenir par des méthodes statistiques.

Plusieurs modèles sont envisageables: les modèles externes (covariance ou spectre) ou les modèles markoviens.

Lorsque l'on cherche à obtenir un modèle markovien, deux approches sont utilisables.

i) Une attaque directe où l'on cherche à estimer ce modèle à partir des réalisations du processus y: c'est l'approche d'ASTROM pour un cas scalaire particulier, ou de MEHRA qui cherche à identifier directement la réalisation particulière qui est un filtre. Ces deux approches ont l'inconvénient de partir d'hypothèses a priori sur certains paramètres de la représentation markovienne du processus, dont la dimension.

ii) L'approche fondée sur les algorithmes présentés ici, qui ne fait aucune autre hypothèse a priori que la stationnarité et qui consiste:

- à estimer la covariance du processus par des moyens statistiques standards
- à utiliser des algorithmes du type HO, RISSANEN qui génèrent des matrices F, G, H permettant de représenter cette covariance sous la forme (3.8) ou (3.33) sans aucune hypothèse a priori sur la dimension de ces matrices

- à utiliser les algorithmes du chapitre 6 pour générer une représentation extrémale P^* ou P_* ou toute représentation combinaison convexe de ces deux-là.

Ayant ainsi obtenu une représentation markovienne, il est alors possible de définir explicitement l'algorithme de filtrage optimal (filtre de Kalman).

Le seul reproche ({KAILATH 3}) qui ait été fait à ce jour à cette méthode proposée initialement dans {FAURRE 2,3} est que ce procédé conduit à la résolution successive de deux équations de Riccati: une pour obtenir la réalisation markovienne, une autre pour obtenir le filtre de Kalman.

Or il ressort du chapitre 7 que la réalisation minimale P_* n'est rien d'autre que le filtre et donc que la résolution d'une seule équation de Riccati suffit. En d'autres termes nous avons mis en évidence qu'à partir de la covariance d'un processus exprimé sous la forme (3.8) ou (3.33) il suffit de résoudre une seule équation de Riccati pour obtenir le filtre.

Ce résultat complète l'arsenal permettant de résoudre les problèmes de filtrage statistique en faisant le lien direct entre une représentation spectrale ou une représentation du type (3.8) ou (3.33) et le filtre de Kalman.

Ainsi que nous l'indiquions à la fin du chapitre 6, les seuls algorithmes concurrents pour cette approche sont ceux de factorisation spectrale (DAVIS, MATYASH, YOULA) qui sont très nettement moins performants dans les cas multi-dimensionnels, sauf éventuellement s'ils sont mis sous forme récursive (TUEL).

2°) Double degré de liberté des réalisations markoviennes

Nous avons remarqué, au chapitre 3, l'analogie entre la représentation d'état d'un système dynamique linéaire transformant $u(.) \to y(.)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu \\ \\ y = Hx + Ju \end{cases}$$

et la représentation markovienne d'un processus gaussien y:

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + v \\ \\ y = Hx + w \\ \\ E\left\{\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v' & w' \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \delta \end{cases} .$$

Lorsque l'on pose le problème inverse de trouver ces modèles à partir de l'application $u(.) \to y(.)$, ou de la covariance $\Lambda(\tau) = E\{y(t+\tau)y'(t)\}$ (problèmes dits de la réalisation déterministe ou stochastique), il est clair qu'il y a dans les deux cas une infinité de solutions..

En particulier, il y a le degré de liberté d'un changement de base pour x.

Si l'on demande que la dimension de x soit minimale, c'est le seul degré de liberté pour le problème déterministe alors que dans le cas stochastique il y a un autre degré de liberté: le choix de $P \in \mathcal{P}$ ensemble convexe fermé borné, en général à intérieur non vide.

On voit ainsi apparaître une différence qui semble essentielle entre les deux problèmes.

8.2 - Questions ouvertes

Nous ne cherchons pas à faire ici une longue liste de questions ouvertes, mais seulement à signaler quelques points ou idées qui pourraient être intéressants.

1°) Interprétations diverses des algorithmes du chapitre 6

Les algorithmes du chapitre 6 consistent à calculer P_* ou P^* comme limite d'une suite P_n ou d'une fonction P_t que nous avons définies comme l'infimum sous contrainte linéaire d'une fonctionnelle quadratique.

Il est clair (en utilisant le lemme (4.1) ou le lemme (4.2)) que P_n ou P_t peuvent être interprétés comme solutions d'un problème standard de minimisation d'un critère quadratique pour un système linéaire, ou d'un problème dual de filtrage sur un intervalle fini. Ce point de vue devrait conduire à des résultats complémentaires sur les divers algorithmes.

2°) Convexité de $\mathcal{P}$

Nous avons vu au chapitre 5 que l'ensemble des réalisations $\mathcal{P}$ est un ensemble convexe fermé borné présentant deux points extrémaux particuliers maximum et minimum P^* et P_*. Nous avons conduit une analyse géométrique de $\mathcal{P}$ montrant que c'est l'inverse d'un cône convexe.

Il serait sans doute intéressant d'analyser l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{P}$ pour essayer d'en déduire d'autres types de représentations paramétriques.

3°) Interprétation de l'inégalité $P_* \leq P \leq P^*$

Cette inégalité semble intéressante: dans une base donnée, il existe une infinité de représentations markoviennes du même processus gaussien y, l'une (P^*) correspondant à l'état le plus "bruité" possible, l'autre (P_*) à l'état le moins "bruité" possible.

Ce résultat devrait avoir une interprétation en thermodynamique ou en théorie de l'information.

4°) Réalisations markoviennes "formelles"

Les relations du lemme positif réel (3.11)-(3.13) ou (3.37)-(3.40) caractérisant les réalisations markoviennes d'un processus sont de deux sortes: des relations linéaires définissant une variété linéaire de matrices P et Q ((3.11) à (3.12) ou (3.37) à (3.39)), et des inéquations ((3.13) ou (3.40)).

On peut poser la question de la signification d'un couple (P,Q) vérifiant les relations linéaires sans vérifier les inéquations. Ce couple est évidemment bien plus simple à calculer qu'une solution de l'ensemble des relations. Son interprétation statistique est bien sûr vide de sens car des matrices qui ne sont pas non négatives définies ne peuvent être interprétées comme des covariances. Néanmoins nous appellerons un tel couple une "réalisation formelle" du processus y. On a montré sur un exemple dans {FAURRE 1} que l'on pouvait cependant utiliser une telle réalisation pour obtenir le filtre de Kalman en choisissant encore une solution particulière de l'équation de Riccati du filtre (7.8) ou (7.39): toutefois la difficulté réside dans le choix de cette solution qui n'est plus la solution positive définie. Le critère et l'algorithme de calcul seraient à étudier. C'est apparemment une autre approche pour réduire le problème global à la résolution d'une seule équation de Riccati, résultat qui serait analogue à celui donné par les algorithmes du chapitre 6 qui conduisent à P_*.

5°) Cas de dimension infinie

Le problème d'optimisation d'un critère quadratique pour un système dynamique linéaire et le problème dual de filtrage statistique ont été généralisés dans le cas de dimension infinie. Voir à ce sujet LIONS, BENSOUSSAN. Le problème de la réalisation stochastique garde un sens dans ce cas et les résultats présentés ici pourraient y être étendus.

REFERENCES

{B.D.O.ANDERSON 1} The Inverse Problem of Optimal Control, Tech. Rep. No. 6560-3, Stanford Electronics Laboratories, April 1966.

{B.D.O.ANDERSON 2} A System Theory Criterion for Positive Real Matrices, J.SIAM Control, Vol. 5, No. 2, p. 171-182, 1967.

{B.D.O.ANDERSON 3} An Algebraic Solution to the Spectral Factorization Problem, IEEE Trans. on AC, Vol. AC-12, p. 410-414, August 1967.

{B.D.O.ANDERSON, R.W.BROCKETT 4} A Multiport State Space Darlington Synthesis, IEEE Trans. on Circuit Theory, CT-14, No. 3, p. 336-337, September 1967.

{B.D.O.ANDERSON 5} Quadratic Minimization, Positive Real Matrices and Spectral Factorization, Tech. Rep. No. EE-6812, University of Newcastle, Australia, June 1968.

{B.D.O.ANDERSON 6} The Inverse Problem of Stationary Covariance Generation, J. of Statistical Physics, Vol. 1, No. 1, p. 133-147, 1969.

K.J.ASTROM, S.WENSMARK, Numerical Identification of Stationary Time Series, Instruments and Measurements, p. 19-40, 1964.

E.F.BECKENBACH, Richard BELLMAN, Inequalities, Springer-Verlag, 1965.

A.BENSOUSSAN, Filtrage optimal des systèmes linéaires, Dunod, 1971.

{A.BLANC-LAPIERRE, R.FORTET 1} Théorie des fonctions aléatoires, Masson, 1953.

{A.BLANC-LAPIERRE 2} Modèles statistiques et traitement du signal. Mémoire et caractère markovien, Colloque GRETSI, Nice, 1-5 Juin 1971.

{A.BLANC-LAPIERRE, P.BERTRAND 3} Sur certains systèmes markoviens liés à des distributions de Poisson, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 273, Ser. A, p. 650-653, 4 Octobre 1971.

H.W.BODE, C.E.SHANNON, A Simplified Derivation of Linear Least Square Smoothing and Prediction Theory, Proc. of the I.R.E., p. 417-425, April 1950.

G.E.P.BOX, G.M.JENKINS, Time Series Analysis forecasting and control, Holden-Day, 1970.

A.E.BRYSON, Y.C.HO, Applied Optimal Control, Blaisdell, 1969.

F.CSAKI, P.FISCHER, On the Spectrum Factorization, Acta Technica Acad. Sci. Hung., Tom. 58, p. 145-168, 1967.

M.C.DAVIS, Factoring the Spectral Matrix, IEEE Trans. on Automatic Control, p. 296-305, October 1963.

{J.L.DOOB 1} The Elementary Gaussian Processes, Ann. Math. Stat.15, p. 229-282, 1944.

{J.L.DOOB 2} Stochastic Processes, Wiley, 1953.

{P.FAURRE 1} Representation of Stochastic Processes, Ph. D. Dissertation, Stanford University, 1967.

{P.FAURRE, J.P.MARMORAT 2} Un algorithme de réalisation stochastique, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 268, Sér. A, p. 978-981, Avril 1969.

{P.FAURRE 3} Identification par minimisation d'une représentation markovienne de processus aléatoire, Symp. on Optimization, Nice, June 1969, édité par Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics 132.

{P.FAURRE 4} Positivité des systèmes dynamiques linéaires et applications, cahier No. 3, IRIA, Novembre 1970.

{P.FAURRE, L.CAMBERLEIN, J.J.CHEVREUL, P.LLORET, C.MESSAN 5} Navigation inertielle optimale et filtrage statistique, Dunod, 1971.

W.FELLER, An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. 2, Wiley, 1966.

J.N.FRANKLIN, The Covariance Matrix of a Continuous Autoregressive Vector Time Series, Annals of Math. Stat., Vol. 34, p. 1259-1264, 1963.

GAUTHIER, Identification stochastique en temps réel, Thèse d'Ingénieur Docteur (à paraître).

I.GELFAND, D.RAIKOV, G.SHILOV, Commutative Normed Rings (en russe), 1960; English Translation: Chelsea, 1964.

{I.C.GOHBERG, M.G.KREIN 1} Systems of Integral Equations on a Half Line with Kernels Depending on the Difference of Arguments, Uspekhi Mat. Naut. 13, No. 2, p. 3-72 (en russe), 1958; A.M.S. Translation, 2, 14, p. 217-287, 1960.

{I.C.GOHBERG 2} A Factorization Problem in Normed Rings, Functions of Isometric and Symmetric Operators and Singular Integral Equations, Uspekhi Mat. Nauk. 19 (en russe); English Translation: Mat. Surveys, 19, 1, p. 63-114, 1964.

{I.C.GOHBERG 3} The Factorization Problem for Operator Functions, Izv. Akad. Nauk. SSR , Ser. Mat. 28, p. 1055-1082 (en russe), 1964; A.M.S. Translation, 2, 49, p. 130-161, 1966.

E.HILLE, R.S.PHILLIPS, Functional Analysis and Semi-Groups, A.M.S., 1957.

K.L.HITZ, Relations between Continuous-time and Discrete-time Quadratic Minimization, Ph. D. Dissertation, University of Newcastle, Australia, 1970.

B.L.HO, R.E.KALMAN, Effective Construction of Linear State-Variable Models from Input/Output Data, Proc. 3rd Allerton Conference, p. 449-459, 1965.

E.IRVING, Identification des systèmes, II, Note EDF, HR 8202, 1968.

K.ITO, Lectures on Stochastic Processes, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1961.

{T.KAILATH, R.A.GEESEY 1} Covariance Factorization - An Explication Via Examples, Proc. 2nd Asilomar Conf. on Systems and Circuits, Monterey, Calif., Nov. 1968.

{T.KAILATH 2} Fredholm Resolvents, Wiener-Hopf Equations and Riccati Differential Equations, IEEE Trans. on Inf. Th., Vol. IT-15, No. 6, p. 665-672, Nov. 1969.

{T.KAILATH, R.A.GEESEY 3} An Innovation Approach to Least Squares Estimation - Part IV, IEEE Trans. on AC, Vol. AC-16, p. 720-726, Dec. 1971.

{R.E.KALMAN 1} A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Journal of Basic Engineering, p. 35-45, March 1960.

{R.E.KALMAN, R.S.BUCY 2} New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, Journal of Basic Engineering, p. 95-108, March 1961.

{R.E.KALMAN 3} Canonical Structure of Linear Dynamical Systems, Proc. Acad. Sci. U.S.A., 48, p. 596-600, 1962.

{R.E.KALMAN 4} New Methods in Wiener Filtering Theory, Proc. of the First Symposium on Engineering Applications Random Function Theory and Probability, Wiley, 1963.

{R.E.KALMAN 5} Mathematical Description of Linear Dynamical Systems, J. SIAM Control, Ser. A, 1, 2, p. 152-192, 1963.

{R.E.KALMAN 6} Lyapunov Functions for the Problem of Lur'e in Automatic Control, Proc. N.A.S. 49, p. 201-205, 1963.

{R.E.KALMAN 7} On a New Characterization of Linear Passive Systems, Proc. of the First Allerton Conference, University of Illinois, p. 456-470, November 1963.

{R.E.KALMAN 8} When is a Linear Control System Optimal?, Journal of Basic Engineering, p. 51-60, March 1964.

{R.E.KALMAN 9} Linear Stochastic Filtering - Reappraisal and Outlook, Symposium on System Theory, Polytechnic Institute of Brooklyn, p. 197-205, April 1965.

{R.E.KALMAN, Y.C.HO, K.S.NARENDRA 10} Controllability of Linear Dynamical Systems, Contributions to Differential Equations, Vol. 1, No. 2, p. 189-213, Interscience, 1963.

R.L.KASHYAP, Maximum Likelihood Identification of Stochastic Linear Systems, IEEE Trans. on AC, Vol. AC-15, No. 1, February 1970.

A.N.KOLMOGOROV, Sur l'interpolation et l'extrapolation des suites stationnaires, C.R. Acad. Sc. Paris, 208, p. 2043-2045, 1939.

J.L.LIONS, Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, Dunod, 1968.

J.P.MARMORAT, Notice d'emploi du sous-programme STOCH 1, Centre d'Automatique, P/11, Mars 1970.

P.MASANI, The Prediction Theory of Multivariate Stochastic Processes, III, Acta Mathematica, p. 141-162, 1960.

I.MATYASH, Ya.SHILKHANEK, A Generator of Random Processes from their Given Spectral Density Matrices, Avt. i Telem., 21, 1, p. 29-35, Jan. 1960.

{R.K.MEHRA 1} On the Identification of Variances and Adaptive Kalman Filtering, IEEE Trans. on AC, Vol. AC-15, No. 2, p. 175-184, April 1970.

{R.K.MEHRA 2} On-line Identification of Linear Dynamic Systems with Applications to Kalman Filtering, IEEE Trans. on AC, Vol. AC-16, No. 1, p. 12-21, February 1971.

J.NEVEU, Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités, Masson et Cie., Paris, 1964.

R.PENROSE, On the Best Approximate Solutions of Linear Matrix Equations, Proc. Cambridge Phil. Soc., 52, p. 17-19, 1956.

V.M.POPOV, Hyperstability and Optimality of Automatic Systems with Several Control Functions, Revue Roumaine des Sciences Techniques, Série Electrotechnique et Energétique, 9, 4, p. 629-690, 1964.

J.RISSANEN, Recursive Identification of Linear Systems, J. SIAM Control, Vol. 9, No. 3, p. 420-430, August 1971.

E.A.ROBINSON, Extremal Representation of Stochastic Processes, Arkiv for Matematik, Band 4, nr 28, p. 379-384, 1962.

E.B.STEAR, Shaping Filters for Stochastic Processes, dans C.T.LEONDES (editor), Modern Control Systems Theory, Mc Graw Hill, 1965.

G.SZEGO, R.E.KALMAN, Sur la stabilité absolue d'un système d'équations aux différences finies, C.R. Acad. Sc. Paris, p. 388-390, 8 Juillet 1963.

W.G.TUEL, Computer Algorithm for Spectral Factorization of Rational Matrices, IBM Journal, p. 163-170, March 1968.

{N.WIENER 1} Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, The M.I.T. Press, 1949.

{N.WIENER 2} On the Factorization of Matrices, Comment. Math. Helv. 29, p. 97-111, 1955.

{N.WIENER, P.MASANI 3} The Prediction Theory of Multivariate Stochastic Processes; I - The Regularity Condition, Acta Mathematica 98, p. 111-150, 1957; II - The Linear Predictor, Acta Mathematica 99, p. 93-137, 1958.

{N.WIENER, E.J.AKUTOWICZ 4} A Factorization of Positive Hermitian Matrices, J. of Mathematics and Mechanics, 8, 1, p. 111-120, 1959.

E. WONG, J.B. THOMAS, On the Multidimensional Prediction and Filtering Problem and the Factorization of Spectral Matrices, J. of Franklin Inst., Vol. 272, N°. 2, p. 87-99, August 1961.

{V.A. YAKUBOVICH 1} Absolute Stability of Nonlinear Control Systems in Critical Cases ; I - Avt. i Telem., 24, 3, p. 293-303, March 1963 ; II - Avt. i Telem., 24, 6, p.717-731, June 1963.

{V.A. YAKUBOVICH 2} Solution of an Algebraic Problem Encountered in Control Theory, Soviet Math. Dokl., Vol. 11, N° 4, p. 882-885, 1970.

D.C. YOULA, On the Factorization of Rational Matrices, IRE Trans. on Information Theory, p. 172-189, July 1961.

K. YOSIDA, Functional Analysis, Springer-Verlag, 1971.

ACADÉMIE DE PARIS

UNIVERSITÉ DE PARIS VI

4, Place Jussieu - 75230 PARIS-CEDEX 05

SERVICE DE LA SCOLARITE

Bureau des Enseignements du 3e cycle

TÉLÉPHONE : 336-25-25 - 325-12-21

PERMIS D'IMPRIMER

DOCTORAT : . . . . DOCTORAT ES SCIENCES . . . . . .

THESE DE : . . . . MATHEMATIQUES . . . . . .

NOM : . . Monsieur . . FAURRE . . . . . .

Prénoms : . . Pierre . . . . . .

né le 15 Janvier . 1942 . à . . . . Paris . . 16éme . . . . . Dépt : Seine

1ère THESE : " . Réalisations Markoviennes de procéssus stationnaires . "

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

2e THESE (Propositions faites par l'Université) : . . . . . .

. . . . " Indications de croissance des fonctions entières à plusieurs variables. " . . . . . .

. . . . . .

RESIDENT: M. LELONG

XAMINATEURS: M.LIONS
M.NEVEU
M.BLANC-LAPIERRE

ACADEMIE DE PARIS UNIVERSITE PARIS VI

Vu et Approuvé

PARIS, le . 19 Janvier . 1973

Le Président

de l'Université de PARIS VI